Марченко И.В.

Введение в финансовую математику

Оглавление

ТЕМА 1. БАЗОВЫЕ ФИНАНСОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или периодами времени. Фактор времени имеет не меньшее значение, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется *принципом неравноценности денег*, относящихся к разным моментам времени. Отмеченная неравноценность двух одинаковых по величине сумм связана, прежде всего, с тем, что имеющиеся сегодня деньги теоретически могут быть инвестированы и принести доход в будущем.

Очевидным следствием принципа неравноценности денег является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Простейшим видом финансовой операции является однократное предоставление в долг некоторой суммы PV *(present value)* с условием, что через некоторое время t будет возвращена большая сумма FV *(future value).* Результативность подобной сделки может быть охарактеризована с помощью:

- абсолютного показателя

$$I = FV - PV \text{ – процентная выплата, доход (interest);} \qquad (1.1)$$

- относительного показателя

$$r_t = \frac{FV - PV}{PV} \text{ – процентная ставка (interest rate)} \qquad (1.2)$$

$$d_t = \frac{FV - PV}{FV} \text{ – учетная ставка (discount rate)} \qquad (1.3)$$

$$r_t = \frac{d_t}{1 - d_t}, \qquad d_t = \frac{r_t}{1 + r_t}. \qquad (1.4)$$

Оба показателя могут выражаться либо в десятичных дробях, либо в процентах. Из определения показателей следует, что $r_t > 0,\ 0 < d_t < 1,\ d_t < r_t$.

Кроме введенных показателей часто используют величину, называемую *дисконт-фактор (discount-factor*):

$$v_t = 1 - d_t = \frac{1}{1 + r_t} = \frac{PV}{FV}. \qquad (1.5)$$

Дисконт-фактор показывает, какую часть сумма PV составляет в сумме FV. Очевидно, что $0 < v_t < 1$.

Удобной и наглядной характеристикой является *индекс роста* суммы PV за время *t*:

$$B_t = \frac{FV}{PV} = \frac{1}{v_t} = 1 + r_t \ . \qquad (1.6)$$

Индекс роста показывает, во сколько раз увеличилась первоначальная сумма за время *t.*

Пример 1.1. Предприниматель получил на два года сумму в размере $PV = 30$ тыс. р. с условием возврата $FV = 40$ тыс. р. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за два года.

Решение. В данной финансовой операции:

- прирост составит $I = FV - PV = 40 - 30 = 10$,
- процентная ставка $r_2 = \dfrac{FV - PV}{PV} = \dfrac{40 - 30}{30} = 0{,}33$,
- учетная ставка $d_2 = \dfrac{FV - PV}{FV} = \dfrac{40 - 30}{40} = 0{,}25$,
- дисконт-фактор $v_2 = \dfrac{PV}{FV} = \dfrac{30}{40} = 0{,}75$.

Пример 1.2. Клиент получил от помещения денег в банк доход в размере 1000 руб. Какая сумма была помещена на депозит, если индекс роста составил 1,5?

Решение. Индекс роста определяется формулой $B_t = \dfrac{FV}{PV} = \dfrac{PV + I}{PV} = 1{,}5$.

Следовательно, $\dfrac{PV + 1000}{PV} = 1{,}5$. Решая уравнение, получаем $PV = 2000$ руб.

Процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется *наращением*, искомая величина – *наращенной суммой*, а ставка – *ставкой наращения*.

Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется *дисконтированием*, искомая величина – *приведенной суммой*, а ставка – *ставкой дисконтирования.*

В первом случае речь идет о движении денежного потока от настоящего к будущему, а во втором – о движении денежного потока от будущего к настоящему.

Экономический смысл финансовой операции, задаваемой формулой (1.2.2), состоит в определении величины той суммы, которой будет или желает располагать инвестор по окончании этой операции:

$$FV = PV(1 + r_t), \text{ то } FV > PV \text{ (так как } 1 + r_t > 1),$$

т.е. время генерирует деньги.

Такой же вывод можно сделать, используя формулу (1.3), так как из нее следует, что

$$PV = FV(1 - d_t)$$

и справедливо неравенство $1 - d_t < 1$.

С другой стороны, $FV = \frac{PV}{1 - d_t}$, здесь ставкой наращения является дисконтная ставка.

Разность $I = FV - PV$ называется *процентной выплатой*, это – величина дохода от предоставления в долг денежной суммы PV. Величина FV показывает как бы будущую стоимость «сегодняшней величины» PV (текущая, современная стоимость) при заданном уровне доходности r_t или d_t.

Логику финансовых операций приведения денег во времени можно представить в виде схемы:

Настоящее	Процесс	Будущее
PV (исходная сумма) ставка (r_t или d_t)	наращение $\longrightarrow$	*FV* (наращенная сумма)
PV (приведенная сумма)	дисконтирование $\longleftarrow$	*FV* (возвращаемая сумма) ставка (r_t или d_t)

Рис.1.1. Логика финансовых операций

Пример 1.3. Имеется два варианта вложения капитала на 2 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличивается на 50 %, а за второй вся сумма увеличивается на 10 %. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 30% от суммы предыдущего. Какой вариант лучше?

Решение.

Согласно 1-ому варианту сумма через год составит

$$FV_1 = PV(1+0,5) = 1,5PV\ ,$$

а на второй год

$$FV_2 = FV_1(1+0,1) = 1,65PV\ .$$

Согласно 2-ому варианту сумма через год составит

$$FV_1 = PV(1+0,3) = 1,3PV\ ,$$

а на второй год

$$FV_2 = FV_1(1+0,3) = 1,69PV\ .$$

Следовательно, второй вариант выгоднее.

1.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ В АУДИТОРИИ

Задача 1.1.1. Предприниматель получил на два года сумму в размере 40 тыс. р. с условием возврата 60 тыс. р. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за два года.

Задача 1.1.2. Предприятие за взятый кредит через год должно вернуть процентный доход - 800 тыс. р. Определите величину кредита, если учетная ставка 12 %. Чему равен дисконт фактор?

Задача 1.1.3. Товарооборот магазина в июне составил 1200 тыс.р., а в июле – 900 тыс.р. на сколько процентов уменьшился товарооборот в июле?

Задача 1.1.4. Клиент банка получил от помещения денег на депозит на год процентный доход - 100 тыс. р. Какая сумма была помещена на депозит, если индекс роста ее за это время составил 1,5?

Задача 1.1.5. За продажу дачного участка комиссионер получил комиссионные - 10 тыс.р., что составило 5 % от продажной цены. Определите, за какую сумму был продан участок.

Задача 1.1.6. Предприятие реализовало партию товара за 50 тыс.р., получив при этом 3% убытка. Определите величину убытка и себестоимость товара.

Задача 1.1.7. Предприниматель за 1 кг некоторого товара хочет получить 15 рублей. Какую цену ему следует назначить, чтобы сделав 3 % скидку, получить 15 рублей за кг?

1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.2.1. Имеется два варианта вложения капитала на 2 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличивается на 40 %, а за второй вся сумма увеличивается на 10 %. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 25 % от суммы предыдущего. Какой вариант лучше?

Задача 1.2.2. В результате инвестирования первоначальный капитал за первый год вырос в 1,2 раза, за второй год в 1,5 раза. Чему равен индекс роста суммы? Определите, на сколько процентов увеличилась первоначальная сумма за 2 года.

Задача 1.2.3. Вклад 5 тыс. р. положен в банк на 3 месяца с условием, что процентный доход от финансовой сделки составит 800 р. Определите квартальные процентную и учетную ставки. Найдите дисконт фактор.

Задача 1.2.4. Предполагается инвестировать три проекта в размере соответственно 20, 30 и 50 тыс.р. Ожидается, что в зависимости от ситуации доходности этих инвестиций за два года могут колебаться в следующих границах: для первой – от 15 до 20 %, для второй – от 10 до 40 %, для третьей – от 20 до 40 %. Определите, какой минимальный и максимальный доход можно получить за два года.

Задача 1.2.5. Определите доходность в виде простой процентной ставки за предоставление потребительского кредита на следующих условиях: 35 % стоимости покупки оплачивается сразу, а через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 20 % от стоимости покупок в качестве платы за кредит.

ТЕМА 2. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Наращение по простой процентной ставке. Предоставляя свои денежные средства в долг, их владелец получает определенный доход в виде процентов, начисляемых по некоторому алгоритму в течение определенного промежутка времени.

Основным *(базовым)* интервалом времени в финансовых операциях является один год. Процентная ставка при этом устанавливается в виде *годовой ставки*, подразумевающей однократное начисление процентов по истечении года после получения ссуды.

Схема простых процентов (simple interest) предполагает неизменность величины, с которой происходит начисление. Пусть исходный инвестируемый капитал равен PV, требуемая доходность – r. Считается, что инвестиция сделана на условиях простого процента, если инвестируемый капитал ежегодно увеличивается на величину $PV \cdot r$, таким образом, размер инвестированного капитала FV через n лет будет равен

$$FV = PV + PV \cdot r + \ldots + PV \cdot r = PV(1 + nr), \qquad (2.1)$$

т. е. проценты начисляются на одну и ту же величину в течение всего срока.

Выражение (2.1) называется формулой *наращения по простым процентам*, множитель $(1+nr)$ – *множителем наращения* или *коэффициент наращения.*

Прирост капитала (процентная выплата)

$$I = FV - PV = PV \cdot n \cdot r \qquad (2.2)$$

пропорционален сроку ссуды и ставке процента.

Отметим, что если ставка r дана в процентах, то при использовании формул (2.1) и (2.2), ставку нужно выразить в десятичных дробях.

Пример 2.1. В банк поместили вклад 20 тыс. р. под простую процентную ставку 10% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова будет величина начисленной процентной выплаты? Если банк осуществляет регулярную выплату процентов, то какая сумма будет получена а) каждый год; б) каждый квартал?

Решение. Используя формулу наращения по простым процентам (2.1), получаем:

$$FV = PV(1 + nr) = 20(1 + 0{,}1 \cdot 3) = 26 \text{ тыс. р.}$$

Величина начисленных процентов I составит:

$$I = FV - PV = 26 - 20 = 6 \text{ тыс. р.}$$

Величина начисленной процентной выплаты, за один год, вычисляется по формуле $I = PV \cdot n \cdot r$ (2.2) при $n = 1$:

$$I_1 = 20 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 2 \text{ тыс. р.}$$

Величина процентной выплаты за квартал вычисляется аналогично при $n = 0{,}25$:

$$I_{0,25} = 20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}5 \text{ тыс. р.}$$

Заметим, что проценты на процентные выплаты не начисляются, поэтому имеет смысл процентные выплаты регулярноно получать и использовать для иных инвестиций.

Наращение по простым процентам в случае, когда продолжительность финансовой операции n **не равна целому числу** лет, определяется по формуле

$$FV = PV\left(1 + \frac{t}{T} r\right), \qquad (2.3)$$

где t – продолжительность финансовой операции в днях, T – количество дней в году.

Определяя продолжительность финансовой операции, принято день выдачи и день погашения ссуды считать за один день. В зависимости от того, чему принимается равной продолжительность года (квартала, месяца), получают два варианта расчета процентов:

- *точные проценты*, определяемые исходя из точного числа дней в году (365 или 366), в квартале (от 89 до 92), в месяце (от 28 до 31);
- *обыкновенные проценты,* определяемые исходя из приближенного числа дней в году, квартале и месяце (соответственно 360, 90, 30).

При определении продолжительности периода, на который выдана ссуда, также возможны два варианта:

- принимается в расчет точное число дней ссуды (расчет ведется по дням);
- принимается в расчет приближенное число дней ссуды (исходя из продолжительности месяца в 30 дней).

Для упрощения процедуры расчета точного числа дней пользуются специальными таблицами (одна для обычного года, другая для високосного). Продолжительность операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня (Таблицы 1, 2, Приложения)

В различных странах применяются различные способы расчетов:

- *обыкновенные проценты с приближенным числом дней*, обозначаемые как $360/360$;
- *обыкновенные проценты с точным числом дней*, обозначаемые как $365/360$, или $ACT/360$;
- *точные проценты с точным числом дней*, обозначаемые как $365/365$, или ACT/ACT.

Пример 2.2. Ссуда в размере 40 тыс. р. предоставлена 10 марта с погашением 13 августа того же года под процентную ставку 12 % годовых. Рассчитаем различными возможными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год високосный.

Решение. Точное число дней ссуды (см. таблицу 2, Приложения)

$$t = t_2 - t_1 = 226 - 70 = 156,$$

приближенное число дней ссуды

$$t = 4 \cdot 30 + 13 + (30 - 10) = 153$$

(по 30 дней в апреле, мае, июне, июле, 20 дней марта и 13 дней августа).

Точные проценты с точным числом дней:

$$FV = 40\left(1 + \frac{156}{366}0{,}12\right) = 42{,}045 \text{ тыс. р.}$$

Обыкновенные проценты с точным числом дней:

$$FV = 40\left(1 + \frac{156}{360}0{,}12\right) = 42{,}08 \text{ тыс. р.}$$

Обыкновенные проценты с приближенным числом дней:

$$FV = 40\left(1 + \frac{153}{360}0{,}12\right) = 42{,}04 \text{ тыс. р.}$$

Переменные простые ставки и реинвестирование. Финансовое соглашение может предусматривать не только постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (*переменную, плавающую*) ставку. Например, наличие инфляции вынуждает периодически варьировать процентную ставку.

Пусть на период n_k установлена процентная ставка i_k, тогда приращение капитала за этот период равно величине $PV \cdot n_k \cdot i_k$, если таких периодов m (т.е. $k = 1,2,...,m$), то наращенная сумма за время $n = n_1 + n_2 + ... + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$ определяется по формуле:

$$FV = PV + PVn_1i_1 + PVn_2i_2 + ... + PVn_mi_m = PV\left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k\right). \qquad (2.4)$$

Обозначим $i = \frac{\sum_{k=1}^{m} n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} n_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k i_k$, тогда формула (2.4) примет вид $FV = PV(1 + ni)$, т.е. на весь период длительностью n можно установить процентную ставку i, доставляющую такой же результат, как и данные переменные ставки, а для определения наращенной суммы можно пользоваться формулой (2.1).

Пример 2.3. Вкладчик положил в банк 20 тыс. руб. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 10 % годовых, каждые последующие полгода ставка повышается на 2 %. Найдите наращенную сумму за два года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада.

Решение. Поскольку $PV = 20,\ n_1 = 1;\ \ n_2 = n_3 = \frac{1}{2};\ \ i_1 = 0{,}1;\ i_2 = 0{,}12;$

$i_3 = 0{,}14,$, то по формуле (2.4)

$$FV = 20\left(1 + 1\cdot 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}12 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 24{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

Такую же наращенную сумму можно получить, если начисляются простые проценты за 2 года по ставке

$$i = \frac{1}{2}\left(1\cdot 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}12 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 0{,}115 \text{ или } i = 11{,}5\,\% \text{ годовых.}$$

Пусть опять за период n_k установлена процентная ставка i_k, но при изменении (или без изменения) ставки наращенная к этому моменту сумма вкладывается вновь под новый простой процент. Такая финансовая операция называется *реинвестированием* или *капитализацией* полученных на каждом этапе наращения средств.

Тогда за период n_1 наращенная сумма станет равной величине

$$FV_1 = PV(1 + n_1 i_1),$$

после чего будет переоформлена на следующий срок (длительностью n_2).

Через время n_2 наращенная сумма станет равной величине

$$FV_2 = FV_1(1 + n_2 i_2) = PV(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим формулу для нахождения наращенной суммы за время $n=\sum_{k=1}^{m} n_k$ при реинвестировании:

$$FV = PV(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)\ldots(1+n_m i_m) = PV\prod_{k=1}^{m}(1+n_k i_k). \qquad (2.5)$$

Пример 2.4. По данным предыдущего примера, найдите наращенную сумму за два года, если одновременно с изменением ставки происходит и капитализация процентного дохода.

Решение. С учетом капитализации процентов, имеем

$$FV = 20(1+0{,}1)\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}12\right)\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}14\right) = 24{,}952 \text{ тыс. р.}$$

Получилась большая наращенная сумма, чем в предыдущем примере, так как после каждого периода начисления осуществляется операция реинвестирования.

Дисконтирование по простым процентам. При заключении финансовых соглашений часто приходится решать задачу обратную к задаче нахождения наращенной суммы. По заданной сумме *FV*, которую предполагают получить через время t, требуется определить величину капитала *PV*, которую требуется инвестировать в данный момент. Говорят, что капитал *FV дисконтируется*, величина удержанных процентов часто называется *дисконтом*. Капитал *PV*, найденный с помощью процесса дисконтирования суммы *FV*, называется *приведенной (современной, текущей, капитализированной)* стоимостью.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным наращению первоначального капитала: решается задача нахождения величины капитала *PV*, которая через n лет при наращении по простым процентам по ставке r будет равна *FV*. Решая (2.1) относительно *PV*, получим:

$$PV = \frac{FV}{1+nr}. \qquad (2.6)$$

Множитель $\frac{1}{1+nr}$ называется *коэффициентом дисконтирования* и показывает долю капитала *PV* в *FV.*

Разность D между капиталами *FV* и *PV* называется *дисконтом:*

$$D = FV - PV = \frac{FV \cdot n \cdot r}{1+n \cdot r}. \qquad (2.7)$$

Пример 2.5. Из какого капитала можно получить 4,5 млн. р. через 5 лет наращением по простым процентам при ставке 10 % годовых?

Решение. Пользуясь формулой (2.6), получаем

$$PV = \frac{FV}{1+nr} = \frac{4{,}5}{1+5\cdot 0{,}1} = 3 \text{ млн. р.}$$

Дисконт составит $D = FV - PV = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$ млн. р.

Пример 2.6. Через полгода после заключения финансового соглашения о получении кредита должник обязан заплатить 2,16 тыс. р. Какова первоначальная величина кредита, если он выдан под 16% годовых?

Решение. Используя формулу (2.6), получим:

$$PV = \frac{FV}{1+\frac{t}{T}r} = \frac{2{,}16}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}16} = 2 \text{ тыс.р.},$$

дисконт в этом случае равен $D = FV - PV = 2{,}16 - 2 = 0{,}16$ тыс. р.

Банковское дисконтирование, или *банковский учет,* применяется при учете векселей банком или другим учреждением.

Вексель является письменным безусловным обязательством выплатить в установленный срок определенную сумму предъявителю векселя.

Вексель может быть оформлен по-разному, однако чаще всего банку приходится иметь дело с суммой к погашению. Наиболее распространенной является ситуация, когда владелец векселя на сумму FV предлагает банку раньше срока оплаты векселя купить его. Такая покупка векселя у владельца до срока оплаты по цене, меньшей той, которая указана на векселе, называется *дисконтированием (учетом)* векселя. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется *дисконтированной величиной векселя*.

Таким образом, векселедержателю досрочно выплачивается обозначенная на векселе сумма за вычетом определенных процентов (*дисконта*), удерживаемых банком в свою пользу.

Дисконт D представляет собой проценты, начисленные за время n от дня дисконтирования до дня погашения векселя на сумму FV.

Если объявленная ставка *дисконтирования (учетная ставка*) равна d, то

$$D = FV \cdot n \cdot d \qquad (2.7)$$

и владелец векселя получит

$$PV = FV - FVnd = FV(1 - nd). \qquad (2.8)$$

Множитель $(1 - nd)$ называется *дисконтным множителем*, или *коэффициентом дисконтирования*.

Учет векселей чаще всего осуществляется способом $365/360$.

Пример 2.7. Вексель на сумму 100 тыс. р. со сроком погашения 25.08.2012 предъявлен для учета 05.06.2012, учетная ставка банка 10 % годовых. Найдем сумму, которую получит векселедержатель от банка, и доход банка от данной операции.

Решение. За вексель банк выплатит сумму

$$PV = FV(1 - nd) = 100\left(1 - \frac{25 + 30 + 25}{360} 0{,}1\right) = 97{,}78 \text{ тыс. р.},$$

проценты банка составят

$$D = FV - PV = 100 - 96{,}94 = 2{,}23 \text{ тыс. р.}$$

Наращение по простой учётной ставке. Задача, обратная банковскому дисконтированию, называется *наращением по учетной ставке*. Она позволяет определить сумму, которую следует написать на векселе FV, если задана текущая величина долга PV, из формулы (2.7) получим:

$$FV = \frac{PV}{1 - n \cdot d} \tag{2.9}$$

Величина $\frac{1}{1 - n \cdot d}$ — *множитель наращения* является величиной обратной к коэффициенту дисконтирования.

Пример 2.8. За вексель, учтенный за полтора года до срока по дисконтной ставке в 10 % , заплачено 17 тыс. р. Определите номинальную величину векселя.

Решение. Поскольку $PV = 17$, $n = \frac{3}{2}$, $d = 0{,}1$, то из формулы (2.9) получим:

$$FV = \frac{PV}{1 - nd} = \frac{17}{1 - \frac{3}{2} \cdot 0{,}1} = 20 \text{ тыс.р.}$$

Найдем соотношение между годовыми ставками d и r, обеспечивающими через период времени n получение одной и той же наращенной величины FV из начального капитала PV:

$$r = \frac{d}{1 - nd}, \quad d = \frac{r}{1 + nr}. \tag{2.10}$$

Ставки d и r, связанные между собой соотношением (2.10) называются *эквивалентными*, так как они приводят к одинаковому финансовому результату.

Пример 2.9. Банк учитывает вексель за 180 дней до срока по учетной ставке 10 %, используя временную базу 365 дней. Определите доходность такой операции по процентной ставке?

Решение. Выражая простую процентную ставку через учетную, получаем:

$$r = \frac{d}{1-nd} = \frac{0{,}1}{1-\frac{180}{365}\cdot 0{,}1} = 0{,}105$$

Переменная учетная ставка. Учетная ставка может иногда меняться во времени. Пусть на период n_k установлена учетная ставка d_k, тогда дисконт за этот период равен величине $PV \cdot n_k \cdot d_k$, если таких периодов m (т.е. $k = 1,2,...,m$), то дисконт за время $n = n_1 + n_2 + ... + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$ определяется по формуле:

$$D_d = FVn_1d_1 + FVn_2d_2 + ... + FVn_md_m = FV\sum_{k=1}^{m} n_kd_k \qquad (2.11)$$

и поэтому

$$PV = FV - FV\sum_{k=1}^{m} n_kd_k = FV\left(1-\sum_{k=1}^{m} n_kd_k\right),$$

откуда получаем наращенную сумму:

$$FV = \frac{PV}{1-\sum_{k=1}^{m} n_kd_k}. \qquad (2.12)$$

Пример 2.10. В банк предъявлен вексель на сумму 100 тыс.р. за два года до погашения. Банк согласился учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода 30 % годовых, а затем каждые полгода ставка повышается на

2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Решение. Используя формулу (2.4.3) $D_d = FV\sum_{k=1}^{m} n_k d_k$, получаем дисконт за 2 года:

$$D_d = 100\left(\frac{0,3+0,32+0,34+0,36}{2}\right) = 66 \text{тыс. р}$$

Следовательно, векселедержатель получит

$$PV = FV - D_d = 100 - 66 = 34 \text{тыс.р.}$$

Такой же дисконт можно получить, установив на 2 года постоянную простую учетную ставку

$$d = \frac{0,3+0,32+0,34+0,36}{2 \cdot 2} = 0,33.$$

Определение срока ссуды и величины ставки. При заключении финансовых договоров приходится решать не только задачи определения наращенной суммы или приведенной стоимости. Может возникнуть необходимость в нахождении других параметров: процентных и учетных ставок, срока ссуды. Формула для вычисления того или иного параметра получается из соответствующего равенства, рассматриваемого как алгебраическое уравнение с одним неизвестным.

Если известны начальный капитал PV, наращенная сумма FV, процентная ставка r или учетная ставка *d*, то срок ссуды *n* находится по формулам соответственно:

$$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot r}, \qquad (2.13)$$

$$n = \frac{FV - PV}{FV \cdot d}. \qquad (2.14)$$

В этих формулах (2.13) и (2.14) срок измеряется в годах, если положить $n = \frac{t}{T}$, то формулы примут вид

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} T \qquad (2.15)$$

$$t = \frac{FV - PV}{FV \cdot d} T , \qquad (2.16)$$

где t – продолжительность финансовой операции в днях, T – количество дней в году.

Процентные ставки определяют, например, при оценке финансовой эффективности сделки или при сравнении различных сделок по их доходности в тех случаях, когда ставки не даны в явном виде.

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \text{ или } r = \frac{FV - PV}{PV \cdot t} T , \qquad (2.17)$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \text{ или } d = \frac{FV - PV}{FV \cdot t} T . \qquad (2.18)$$

Пример 2.11. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 30 тыс. р. под простые проценты с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 32 тыс. р., если процентная ставка равна 10 %, в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и год високосный.

Решение. Из формулы (2.15) при $FV = 32, PV = 30, T = 366, r = 0{,}1$ имеем

$$t = \frac{(32 - 30)366}{0{,}1 \cdot 30} = 244 \text{ дня.}$$

Учёт налогов и инфляции при использовании простой процентной ставки. Рассмотрим влияние налогов и инфляции на финансовые расчеты. Пусть на сумму PV в течение времени n начислялись простые проценты со ставкой r. Тогда до выплаты налогов процентные выплаты составляют величину $I = PV \cdot n \cdot r$. Если ставка налога на проценты равна q, то надо будет выплатить государству величину $I_q = PV \cdot n \cdot r \cdot q$, и, следовательно, наращенная сумма с учетом уплаты налога составит:

$$FV_q = FV - I_q = PV + PV \cdot n \cdot r - PV \cdot n \cdot r \cdot q = PV(1 + n \cdot r(1 - q)) \qquad (2.19)$$

Таким образом, налог на проценты, по существу, уменьшает ставку наращения: начисление процентов фактически происходит не по ставке *r*, а по ставке $r(1-q)$, которая, конечно, меньше, чем r.

Пример 2.12. На депозит была помещена сумма 50 тыс. р. Под 20 % годовых на полтора года, по истечении которых на сумму были начислены простые проценты. Определите наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога 13 %.

Решение. Согласно формуле (2.19) имеем:

$$FV_q = PV(1+nr(1-q)) = 50(1+1{,}5\cdot 0{,}2(1-0{,}13)) = 63{,}05 \text{ тыс.р.}$$

Если на сумму PV в течение времени n начислялись простые проценты по годовой учетной ставке *d*, то при ставке налога на проценты *q*, необходимо выплатить государству $I_q = \dfrac{PV\cdot n\cdot d}{1-n\cdot d}q$.

Следовательно, наращенная сумма с учетом уплаты налога на проценты, составит:

$$FV_q = FV - I_q = \frac{PV}{1-nd} - \frac{PVnd}{1-nd}q = \frac{PV}{1-nd}(1-ndq). \qquad (2.20)$$

Пример 2.13. В условиях предыдущего примера наращение осуществляется по учетной ставке 18 %, то какова будет наращенная сумма после уплаты налога на проценты?

Решение. С использованием формулы (2.20), получаем

$$FV_q = \frac{50}{1-1{,}5\cdot 0{,}18}(1-1{,}5\cdot 0{,}18\cdot 0{,}13) = 66{,}09 \text{ тыс. р.}$$

Инфляция – определяется как процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или снижением покупательной способности денег. В современных денежных отношениях инфляция играет заметную роль, и без ее учета конечные результаты часто представляют собой условную величину. Ее необходимо учитывать, по крайней мере, в двух случаях: при расчете наращенной денежной суммы и при измерении реальной эффективности финансовой операции.

Пусть выбран определенный набор товаров и услуг, и пусть за время t его стоимость изменилась от суммы P_1 до суммы P_2.

Индексом цен (индексом инфляции) за время t называется величина

$$I_p^{(t)} = \frac{P_2}{P_1}. \tag{2.21}$$

Индекс цен показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период на некоторый постоянный набор товаров и услуг (потребительская корзина). Индекс цен безразмерная величина, измеряемая в дробях или процентах.

Темпом инфляции за время t называется величина

$$h_t = \frac{P_2 - P_1}{P_1}. \tag{2.22}$$

Темп инфляции h_t (умноженный на 100) показывает, на сколько процентов выросли цены за период времени t.

Из формул (2.21) и (2.22) следует соотношение между индексом цен и темпом инфляции:

$$I_p^{(t)} = 1 + h_t.$$

Пример 2.14. За полгода цены увеличились в 2 раза. Найдите индекс и темп инфляции.

Решение. Индекс инфляции ищем по формуле $I_p^{(1/2)} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2P}{P} = 2$, тогда темп инфляции $h_t = I_p^{(1/2)} - 1 = 2 - 1 = 1$, или 100 %.

Если известны индексы цен $I_p^{(t_1)}, I_p^{(t_2)}, \ldots I_p^{(t_k)}$ (или темпы инфляции $h_{t_1}, h_{t_2}, \ldots h_{t_k}$) за соответствующие последовательные периоды времени $t_1, t_2, \ldots t_k$, то индекс инфляции за время $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ будет равен величине

$$I_p^{(t)} = I_p^{(t_1)} \cdot I_p^{(t_2)} \cdot \ldots \cdot I_p^{(t_k)} = \prod_{i=1}^{k} I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^{k} (1 + h_{t_i}), \qquad (2.23)$$

в частности, если $h_{t_1} = h_{t_2} = \ldots = h_{t_k} = h$, то $I_p^{(t)} = (1+h)^k$.

Проиллюстрируем формулу (2.6.5) на различных примерах.

Пример 2.15. Среднемесячный темп инфляции составил 2 %. Определите годовой индекс инфляции.

Решение. $I_p^{(1)} = \left[I_p^{(1/12)} \right]^{12} = (1 + 0{,}02)^{12} = 1{,}2682$, или 26,82 %.

Пример 2.16. В течение полугода каждые два месяца цены росли на 4, 6 и 7 % соответственно. Определите индекс и темп инфляции: а) за полгода, б) в среднем за месяц, в) в среднем за квартал.

Решение. а) индекс инфляции за полгода найдем по формуле (2.23):

$$I_p^{(1/2)} = 1{,}04 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07 = 1{,}179,$$

темп инфляции для того же периода $h_{(1/2)} = I_p^{(1/2)} - 1 = 1{,}179 - 1 = 0{,}179$.

б) среднемесячный индекс инфляции составит:

$$I_p^{(1/12)} = \sqrt[6]{I_p^{(1/2)}} = 1{,}027,$$

среднемесячный темп инфляции $h_{(1/12)} = I_p^{(1/12)} - 1 = 0{,}027$.

в) индекс инфляции в среднем за квартал равен

$$I_p^{(1/4)} = \left(I_p^{(1/12)} \right)^3 = 1{,}085,$$

темп инфляции в среднем за квартал $h_{(1/4)} = I_p^{(1/4)} - 1 = 0{,}085$.

Пример 2.17. В 1993 г. инфляция в Сербии и Черногории составила 313 миллионов процентов. За какое время деньги теряли половину своей покупательной стоимости, если год считать равным 360 дням?

Решение. Темп инфляции составил $h_{(1)} = 3130000$, индекс инфляции $I_p^1 = h_{(1)} + 1 = 3130001$, следовательно, ежедневный индекс инфляции $I_p^{(1/360)} = 3130001^{(1/360)}$. Таким образом, надо определить такое количество дней t, чтобы выполнялось равенство $3130001^{(1/360)t} = 2$. Логарифмируя обе части равенства, получаем $t = \dfrac{360 \cdot \ln(2)}{\ln(3130001)} \approx 17$ дней.

Если за время t была получена некоторая наращенная сумма FV, а индекс инфляции составил величину $I_p^{(t)}$, то эта сумма с учетом инфляции $\overline{FV}$ составит

$$\overline{FV} = \frac{FV}{I_p^{(t)}}. \tag{2.24}$$

Например, при годовой инфляции 2 % сумма в 6 тыс. р. через два года по своей покупательной способности в ценах текущего дня составит величину

$$\overline{FV} = \frac{6}{(1+0{,}02)^2} = 5{,}767.$$

Если наращение происходило по *схеме простых процентов*, то формула (2.24) имеет вид

$$\overline{FV} = \frac{PV(1+nr)}{I_p^{(t)}}. \tag{2.25}$$

Для того, чтобы в условиях инфляции стоимость первоначального капитала на самом деле росла, исходную процентную ставку увеличивают, т. е. происходит индексация ставки. Такую новую ставку $\bar{r}$ с поправкой на инфляцию называют *брутто-ставкой*. Исходную процентную ставку r иногда называют *нетто-ставкой*.

Для обеспечения полной компенсации негативного действия инфляции и получения доходности согласно первоначальной ставке r, размер *брутто-ставки* $\bar{r}$ при начислении простых процентов определяется из равенства

$$1+nr=\frac{1+n\bar{r}}{I_p^{(t)}}. \qquad (2.26)$$

Пусть задана номинальная процентная ставка r, т. е. объявлена норма доходности. Тогда для определения *реальной* процентной ставки r_{real} (доходности с учетом инфляции при начислении простых процентов) можно воспользоваться равенством, аналогичным (2.26).

$$1+nr_{real}=\frac{1+nr}{I_p^{(t)}}.$$

Пример 2.18. Определим реальную ставку простых процентов за год, если номинальная процентная ставка равна 16 % при годовой инфляции 8 %.

Решение. Согласно определению реальной ставки, получаем:

$$r_{real}=\frac{1+r}{I_p^{(t)}}-1=\frac{1+0{,}16}{1+0{,}08}-1=0{,}074.$$

Замена платежей и их консолидация. На практике часто возникают ситуации, вынуждающие участников сделки к изменению условий ранее заключенного финансового соглашения (либо изменение сроков, либо объединение нескольких платежей в один с установлением срока его погашения – *консолидация платежей*). В результате этих изменений интересы всех участников должны быть учтены, то есть следует руководствоваться *принципом финансовой эквивалентности*, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному и тому же моменту времени приравнивается сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени.

Рассмотрим ситуацию, когда платеж P_1 со сроком n_1 надо заменить платежом P_0 со сроком n_0, сроки измеряются от одного момента времени и простая ставка равна r.

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$P_0 = \begin{cases} P_1(1+(n_0-n_1)r), & n_0 > n_1 \\ \dfrac{P_1}{1+(n_1-n_0)r}, & n_0 < n_1 \end{cases} \tag{2.27}$$

Рассмотрим теперь задачу замены платежей $P_1, P_2, \ldots P_m$, выплачиваемых соответственно через время $n_1, n_2, \ldots n_m$ одним платежом P_0 со сроком n_0. Обычно величину платежа P_0 определяют путем приведения всех платежей к дате погашения платежа n_0.

Тогда *уравнение эквивалентности* имеет вид:

$$P_0 = \sum_{i,\, n_i < n_0} P_i(1+(n_0-n_i)r) + \sum_{j,\, n_j > n_0} P_i(1+(n_j-n_0)r)^{-1}. \tag{2.28}$$

Пример 2.19. Платежи в 5, 7, 9 тыс. р. должны быть погашены через 90, 120, 180 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 150 дней. Найдите величину консолидированного платежа, если простая процентная ставка 20 % годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

Решение. Консолидированный платеж с и формулы (2.28) можно найти следующим образом:

$$P_0 = 5\left(1+\frac{150-90}{360}0,2\right)+7\left(1+\frac{150-120}{360}0,2\right)+9\left(1+\frac{180-150}{360}0,2\right)^{-1} = 21{,}135.$$

2.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ В АУДИТОРИИ

Задача 2.1.2. Предприятие обратилось 1 марта в банк за кредитом в 150 тыс. р., обязуясь вернуть сумму с процентами в конце года. Какой способ начисления простых процентов выгоден для предприятия, и какой для банка, если используется процентная ставка 26 % годовых и год невисокосный?

Задача 2.1.2. За срок ссуды сумма к погашению составила 86 тыс. р., причем начислялись обыкновенные проценты с точным числом дней. Определите величину суммы к погашению при начислении точных процентов при условии, что размер ссуды 70 тыс. р. и год: а) невисокосный; б) високосный.

Задача 2.1.3. Вы получили ссуду 12 февраля на условиях начисления простых процентов. Взятую сумму с процентами необходимо вернуть 27 декабря того же года. Во сколько раз вырастет долг при различных способах начисления простых процентов, если применяется процентная ставка 32 % годовых и год невисокосный?

Задача 2.1.4. Депозитный сертификат дисконтного типа сроком 45 дней продается по цене, определяемой простой учетной ставкой 32 % годовых и расчетным количеством дней в году, равном 360. Определите эквивалентное значение простой годовой процентной ставки, определяющей стоимость привлеченных средств банка, при расчетном количестве дней в году, равном 365.

Задача 2.1.5. В банк предъявлен вексель на сумму 80 тыс.р. за полгода до срока его погашения. Банк согласился учесть вексель по переменной учетной ставке, установленной следующим образом: первые два месяца – 24 % годовых, затем в каждом следующем месяце ставка повышается на 1,5 %. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Задача 2.1.6. При учете предъявленного векселя на сумму 150 тыс. за 200 дней до срока его погашения доход банка составил 24 тыс.р. определите а) доходность этой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки; б) по какой учетной ставке был учтен вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

Задача 2.1.7. Вкладчик поместил в банк 35 тыс. р. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 28 % годовых, каждые следующие полгода ставка повышается на 2 %. Найдите наращенную сумму за три года, если начисляются простые проценты. При какой постоянной процентной ставке можно получить такую же наращенную сумму?

Задача 2.1.8. Определите реальную процентную ставку на год, если номинальная простая процентная ставка равна 30 % годовых при годовом темпе инфляции 12 %. Какова должна быть номинальная процентная ставка, чтобы при таковой инфляции обеспечить реальную доходность 30 %?

Задача 2.1.9. Предприниматель получил в банке кредит 100 тыс.р. на год, какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, чтобы обеспечить реальную доходность этой финансовой операции 12 % при ожидаемом годовом темпе инфляции 8 %? Какую сумму должен будет вернуть предприниматель?

Задача 2.1.10. Согласно контракту предприниматель должен заплатить кредитору 10 тыс.р. через год, 40 тыс.р. – через 3 года и 30 тыс.р. – через 5 лет. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс.р. за 2 года и 40 тыс.р. – через 4 года. Являются ли контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 30 %.

Задача 2.1.11. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 30 % годовых, через полгода была увеличена до 35 %, а еще через квартал до 40 %.

Определите реальную величину процентов, начисленных за год на вклад 20 тыс. р., если темп инфляции каждый квартал составлял 6 %.

Задача 2.1.12. Определите реальную простую учетную ставку, если номинальная годовая учетная ставка равна 30 % и годовой индекс инфляции составил 1,2. Чему должна быть равна величина учетной ставки, обеспечивающая реальную доходность, определяемую простой учетной ставкой в 30 % годовых?

Задача 2.1.13. В результате использования простой процентной ставки индекс роста вклада за год составил 1,215. На сколько % за это время увеличился вклад с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 14 %?

Задача 2.1.14. За какой срок вклад 8 тыс.р. возрастет до 9 тыс.р. с учетом уплаты налога на проценты при однократном начислении процентов по простой процентной ставке 34 % годовых, если ставка налога на проценты равна 12 %?

2.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.2.1. Банк учитывает вексель за 180 дней до срока по учетной ставке 34 % годовых, используя временную базу в 360 дней. Определите доходность такой операции в виде простой годовой процентной ставки при временной базе, равной 365. В некоторой стране годовая гиперинфляция составила 80 миллионов процентов, за какое время деньги теряли четвертую часть своей покупательной способности, если считать год равным 360 дням?

Задача 2.2.2. Вкладчик поместил в банк свободные денежные средства, на которые согласно договору начисляются простые проценты по изменяющейся процентной ставке: за первые четыре месяца – 27 % годовых, каждый следующий месяц ставка увеличивается на 0,5%.

Через год, закрыв счет вкладчик получил 64,25 тыс. р. Определите, какую сумму получил бы вкладчик, закрыв счет через 9 месяцев.

Задача 2.2.3. В некоторой стране годовой индекс инфляции составил 900 процентов. Определите среднемесячный и средний ежедневный темпы инфляции. За какое время деньги теряли половину своей покупательной способности?

Задача 2.2.4. Имеется обязательство выплачивать долг в течение четырех лет каждые полгода платежами в 20 тыс. р. Какова должна быть величина платежей при выплате этого долга равными ежегодными платежами, если в расчетах используется простая процентная ставка 20 % годовых? Для сравнения платежей в качестве даты приведения принять момент заключения первого контракта.

Задача 2.2.5. По условиям контракта господин Иванов в течение четырех лет каждые полгода должен выплачивать господину Петрову по 12 тыс.р. Через 2 года, сделав четыре платежа, господин Иванов предложил через полгода выплатить весь долг. Какая сумма должна быть выплачена, если расчеты осуществляются по простой процентной ставке 24 % годовых?

Задача 2.2.6. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 16 % годовых, через каждые два месяца увеличивается на 2 %. Определите реальную величину (по своей покупательной способности) наращенной за год суммы с учетом уплаты налога на проценты, если величина вклада 30 тыс.р., ежемесячный темп инфляции 1 % и ставка налога на проценты равна 12 %.

ТЕМА 3. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Наращение по сложной процентной ставке. Инвестиция, сделанная на условиях *сложного процента*, предполагает, что очередной доход за период начисляется не с первоначальной величины капитала, а с общей суммы, включающей также и ранее начисленные и не востребованные инвестором проценты.

Таким образом, размер инвестированного капитала при процентной ставке r будет равен:
к концу первого года

$$FV_1 = PV + PVr = PV(1+r),$$

к концу второго года

$$FV_2 = FV_1 + FV_1 r = FV_1(1+r) = PV(1+r)^2,$$

к концу n-ого года

$$FV_n = PV(1+r)^n.$$

Формула

$$FV = PV(1+r)^n \tag{3.1}$$

называется *формулой наращения по сложным процентам*, множитель $(1+r)^n$ – *множителем наращения сложных процентов*.

Экономический смысл множителя наращения $(1+r)^n$ состоит в следующем: он показывает во сколько раз увеличится капитал в одну единицу через n периодов при заданной процентной ставке r.

Пример 3.1. Сумма 40 тыс. р. инвестируется под процентную ставку 9 % годовых: а) на 6 лет, б) на 9 лет. Найдите наращенные суммы при условии начисления ежегодных сложных процентов.

Решение. При наращении сложными процентами по формуле (3.1)

$$FV = PV(1+r)^n,$$

в случае а) при $n = 6, PV = 50, r = 0{,}09$ получим:

$$FV = 40(1+0{,}09)^6 = 40 \cdot 1{,}677 = 67{,}080 \text{ тыс. р.},$$

в случае б) при $n = 9, PV = 50, r = 0{,}09$, получим:

$$FV = 40(1+0{,}09)^9 = 40 \cdot 2{,}171 = 86{,}84 \text{ тыс. р.}$$

Финансовые соглашения могут предусматривать плавающие процентные ставки, как и в случае наращения по простым процентам. Пусть на период n_k установлена процентная ставка i_k, где $n_1, n_2, ... n_m$ следующие друг за другом периоды. Тогда, учитывая капитализацию начисленных процентов при использовании сложных процентов, наращенная сумма за время $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$ определяется по формуле:

$$FV_n = PV(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \ldots (1+i_m)^{n_m} = PV \prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}. \quad (3.2)$$

Пример 3.2. Предприниматель получил в банке ссуду в размере 30 тыс.р. сроком на 5 лет на следующих условиях: для первых двух лет ставка равна 12% годовых, на следующие 2 года ставка увеличивается на 1%, на последующее время еще на 1%. Найдите сумму, которую предприниматель должен отдать банку.

Решение. Так как $PV = 30; n_1 = n_2 = 2, n_3 = 1; i_1 = 0{,}12; i_2 = 0{,}13; i_3 = 0{,}14$, то по формуле (3.1.2)

$$FV_n = 30(1+0{,}12)^2(1+0{,}13)^2(1+0{,}14) = 54{,}779 \text{ тыс.р.}$$

Финансовые контракты могут заключаться на период, отличающийся от целого числа лет.

В этом случае существуют различные методы подсчета наращенной суммы:

- *по схеме сложных процентов*

$$FV = PV(1+r)^{a+b}; \quad (3.3)$$

- *по смешанной схеме* (схема сложных процентов для целого числа лет и схема простых процентов для дробной части года)

$$FV = PV(1+r)^a(1+br) \ , \qquad (3.4)$$

где $a = [n]$ – целое число лет, $b = n - [n]$ – дробная часть года.

Пример 3.3. Банк предоставил сумму в 20 тыс. р. на 40 месяцев под 10 % годовых. Найдем сумму, которую предстоит вернуть банку по истечении срока.

Решение. В данном случае $a = 3$, $b = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

По формуле (3.1.4) (схема сложных процентов):

$$FV = PV(1+r)^{a+b} = 20(1+0{,}1)^{\frac{40}{12}} = 20 \cdot 1{,}373 = 27{,}48.$$

По формуле (3.1.5) (смешанная схема):

$$FV = PV(1+r)^a(1+br) = 20(1+0{,}1)^3\left(1+0{,}1\cdot\frac{1}{3}\right) = 27{,}5.$$

Таким образом, смешанная схема более выгодна для банка.

Пример 3.4. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 100 тыс. р. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 12 %, а периоды начисления различны: 1) 30 дней, 2) 90 дней, 3) 180 дней, 4) 1 год, 5) 3 года, 6) 10 лет, 7) 50 лет. Полагать год равным 360 дней. Сравнить полученные результаты.

Решение. Для расчетов по сложным процентам используем формулу $FV = PV(1+r)^{\frac{t}{T}}$, для расчета по простым процентам – формулу $FV = PV\left(1+\frac{t}{T}r\right)$, и получаем следующие наращенные суммы (в тыс. р.):

Результаты расчетов приведены в таблице:

Сложные проценты	Простые проценты
$FV_1 = 100(1+0{,}12)^{\frac{30}{360}} = 100{,}949$	$FV_1 = 100\left(1+\frac{30}{360}0{,}12\right) = 101$
$FV_2 = 100(1+0{,}12)^{\frac{90}{360}} = 102{,}873$	$FV_2 = 100\left(1+\frac{90}{360}0{,}12\right) = 103$
$FV_3 = 100(1+0{,}12)^{\frac{180}{360}} = 105{,}83$	$FV_3 = 100\left(1+\frac{180}{360}0{,}12\right) = 106$
$FV_4 = 100(1+0{,}12) = 112$	$FV_4 = 100(1+0{,}12) = 112$
$FV_5 = 100(1+0{,}12)^3 = 140{,}49$	$FV_5 = 100(1+3\cdot 0{,}12) = 136$
$FV_6 = 100(1+0{,}12)^{10} = 310{,}58$	$FV_6 = 100(1+10\cdot 0{,}12) = 220$
$FV_7 = 100(1+0{,}12)^{50} = 28900$	$FV_7 = 100(1+50\cdot 0{,}12) = 700$

Таким образом, если денежные средства размещены на срок менее одного года, то более выгодна схема начисления простых процентов. Если срок размещения денежных средств превышает один год, более выгодна схема сложных процентов, и наращение идет очень быстрыми темпами.

Внутригодовые процентные начисления. На практике капитализация процентов часто происходит несколько раз в году: по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно. При начислении сложных процентов несколько раз в году пользуются формулой (3.1), понимая под n число периодов начисления, а под r процентную ставку за период. Однако в финансовых соглашениях обычно указывается годовая процентная ставка и количество периодов начисления.

Пусть $r^{(m)}$ – *годовая процентная ставка* при m-разовом количестве начислений процентов в году. Длительность периода наращения равна $1/m$ года, каждый период проценты начисляются по ставке $\frac{r^{(m)}}{m}$. Годовая процентная ставка $r^{(m)}$ называется *номинальной*.

Формула (3.1) примет вид

$$FV = PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}. \qquad (3.2)$$

Пример 3.5. В банк вложены деньги в сумме 10 тыс. р. на 3 года с поквартальным начислением процентов под 8 % годовых. Вычислим, какую сумму должен выплатить банк клиенту.

Решение. По формуле (3.2.1)

$$FV = PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} = 10\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\cdot 3} = 12{,}682 \text{ тыс. р.}$$

Если бы проценты начислялись каждые полгода, то сумма, подлежащая уплате, составила бы

$$FV = PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} = 10\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{2\cdot 3} = 12{,}653 \text{ тыс. р.}$$

Различными видами финансовых контрактов могут предусматриваться различные схемы начисления процентов. Как правило, всегда оговаривается *номинальная* (годовая) процентная ставка. Это не отражает реальной эффективности сделки и не может использоваться для сопоставлений. Универсальным показателем может служить *эффективная процентная ставка*.

Эффективная процентная ставка r_{ef} – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m- разовое начисление процентов по ставке $\frac{r^{(m)}}{m}$.

Формула для вычисления эффективной процентной ставки имеет вид

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m - 1. \qquad (3.3)$$

Пример 3.6. Предприниматель может получить ссуду либо на условиях ежемесячного начисления процентов из расчета 12 % годовых, либо на условиях полугодового начисления процентов из расчета 14 % годовых. Определим, какой вариант предпочтительнее.

Решение. Для первого варианта $r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268$, для второго – $r_{ef} = \left(1 + \frac{0,14}{2}\right)^{2} - 1 = 0,1449$. Таким образом, первый вариант предпочтительнее для предпринимателя.

Если две номинальные годовые процентные ставки $r^{(m_1)}$ и $r^{(m_2)}$ определяют одну и ту же эффективную ставку, то они называются *эквивалентными*:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} - 1 = \left(1 + \frac{r^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2} - 1.$$

Пример 3.7. Определим эквивалентные номинальные процентные ставки с начислениями по полугодиям и ежеквартально, если соответствующая им эффективная ставка равна 10 %.

Решение. Пользуясь формулой (3.2.2), получим: $r^{(m)} = m\left((1 + r_{ef})^{\frac{1}{m}} - 1\right)$.

При первом способе начисления процентов

$$r^{(2)} = 2\left((1 + 0,1)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0,097,$$

при втором

$$r^{(4)} = 4\left((1 + 0,1)^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 0,0964.$$

Пример 3.8. Вкладчик хотел бы за 7 лет утроить сумму, помещенную в банк на депозит. Какова должна быть номинальная процентная ставка при начислении сложных процентов: а) каждые полгода, б) каждый месяц.

Решение. Преобразуя формулу $FV = PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}$, получаем формулу для вычисления годовой номинальной ставки

$$r^{(m)} = m \cdot \left(\left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right).$$

В случае а) $m = 2$ и поэтому:

$$r^{(2)} = 2 \cdot \left(3^{\frac{1}{2\cdot 7}} - 1\right) = 0{,}1633.$$

В случае б) $m = 12$ и поэтому:

$$r^{(12)} = 12 \cdot \left(3^{\frac{1}{12\cdot 7}} - 1\right) = 0{,}158.$$

Из примера видно, чем чаще начисляются проценты, тем меньше должна быть номинальная процентная ставка.

Дисконтирование по сложной процентной ставке. Формула, описывающая процесс дисконтирования по сложным процентам имеет вид

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = \frac{FV}{FM1(r,n)} = FV \cdot FM2(r,n). \qquad (3.4)$$

Множитель $FM2(r,n) = \frac{1}{(1+r)^n} = v^n$ называется *множителем дисконтирования* (табл. 4, Приложения).

Экономический смысл множителя дисконтирования заключается в следующем: он показывает «сегодняшнюю» цену одной денежной единицы будущего спустя n периодов при заданной процентной ставке r.

При m-кратном начислении процентов в год из (3.4) получим:

$$PV = \frac{FV}{\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}} = FV \cdot FM2\left(\frac{r^{(m)}}{m}, mn\right).$$

Пример 3.9. Из какого капитала можно получить 5 тыс. р. через 3 года наращением сложными процентами по ставке 24 % , если наращение осуществляется а) по полугодиям, б) ежемесячно?

Решение. Для варианта а):

$$PV = \frac{5}{\left(1+\frac{0,24}{2}\right)^{2\cdot 3}} = 5 \cdot FM2(12\,\%, 6) = 5 \cdot 0,5066 = 2,533 \text{ тыс. р.}$$

Для варианта б):

$$PV = \frac{5}{\left(1+\frac{0,24}{12}\right)^{12\cdot 3}} = 5 \cdot FM2(2\,\%, 36) = 5 \cdot 0,4902 = 2,451 \text{ тыс. р.}$$

Сложная учетная ставка. Если рассмотреть ситуацию предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент начисляется в момент заключения финансового соглашения, то в этом случае осуществляется операция *дисконтирования (учета)* и применяется *сложная учетная ставка.*

Предположим, что некоторое долговое обязательство на сумму FV и сроком погашения через n лет продается раньше срока с дисконтом по сложной учетной ставке d. Если осуществить продажу за год до срока, то начисляются проценты $FV \cdot d$ и продавец получит сумму

$FV - FV \cdot d = FV(1-d)$. Если обязательство продается за n лет до срока, то продавец получит сумму

$$PV = FV(1-d)^n \ , \qquad (3.5)$$

где множитель $(1-d)^n$ называется *дисконтным множителем*.

Если дисконтирование происходит m раз в году и задана сложная годовая учетная ставка $d^{(m)}$, называемая номинальной, формула для вычисления дисконтированной суммы имеет вид

$$PV = FV\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n} \qquad (3.6)$$

Пример 3.10. Долговое обязательство на выплату 5 тыс. р. со сроком погашения через 4 года учтено за 2 года до срока. Определим полученную сумму, если производилось а) полугодовое, б) поквартальное дисконтирование по номинальной учетной ставке 12 %.

Решение. Для варианта а): $PV = 5\left(1-\frac{0{,}12}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 3{,}903$, для варианта б): $PV = 5\left(1-\frac{0{,}12}{4}\right)^{2 \cdot 4} = 3{,}918$.

Эффективная годовая учетная ставка, обеспечивающая переход от PV к FV при заданных значениях параметров при однократном дисконтировании, имеет вид

$$d_{ef} = 1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} . \qquad (3.7)$$

Используя эффективную учетную ставку, можно определить *эквивалентные учетные ставки* как ставки, удовлетворяющие равенствам:

$$d_{ef} = 1-\left(1-\frac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1} = 1-\left(1-\frac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}. \qquad (3.8)$$

Сложная учетная ставка может использоваться и для осуществления процесса наращения по учетной ставке:

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n}, \qquad (3.9)$$

или при m - разовом наращении в год

$$FV = \frac{PV}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{nm}}. \qquad (3.10)$$

Пример 3.11. Вексель был учтен за 2,5 года до срока погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной в векселе суммы. По какой годовой номинальной учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось: а) поквартальное дисконтирование, б) помесячное дисконтирование?

Решение. Используя формулу дисконтирования по сложной учетной ставке $PV = FV\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n}$, получаем $d^{(m)} = m\left(1-\left(\frac{PV}{FV}\right)^{\frac{1}{mn}}\right)$.

а) $m = 4,\ d^{(4)} = 4\left(1-(0,25)^{\frac{1}{4 \cdot 2,5}}\right) = 0,517;$

б) $m = 12,\quad d^{(12)} = 12\left(1-(0,25)^{\frac{1}{12 \cdot 2,5}}\right) = 0,542.$

Непрерывное наращение и дисконтирование. В зависимости от частоты начисления процентов наращение суммы осуществляется различными темпами, причем с возрастанием частоты, накопленная сумма увеличивается. Пусть $r^{(m)} = r$ - годовая номинальная процентная ставка. Оставляем неизменной величину этой ставки и увеличиваем число начислений сложных процентов m.

Максимально возможное наращение осуществляется при бесконечном дроблении годового интервала. Из формулы (3.2) при $m \to \infty$, следует

$$FV = \lim_{m\to\infty} PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} = PVe^{r^{(\infty)}n}. \qquad (3.11)$$

Чтобы отличать дискретную ставку $r^{(m)}$ от *непрерывной* $r^{(\infty)}$, последнюю называют *силой роста*, и вводят для не специальное обозначение - $r^{(\infty)} = \delta$. Формула (3.11) для нахождения наращенной суммы за n лет при непрерывном начислении процентов принимает вид

$$FV = PVe^{\delta n} . \qquad (3.12)$$

Пример 3.12. Рассчитать накопленную сумму для различных вариантов начисления процентов за один год, если исходная сумма 10000 рублей и номинальная годовая процентная ставка $r^{(m)} = 12\%$.

PV	Частота начисления		*FV*	Проценты
10000	$m=1$	ежегодное	11200	1200
10000	$m=2$	полугодовое	11236	1236
10000	$m=4$	квартальное	11255,09	1255,09
10000	$m=12$	ежемесячное	11268,25	1268,25
10000	$m=365$	ежедневное	11274,75	1274,75
10000	$m=\infty$	непрерывное	11274,97	1274,97

Приравнивая накопленные суммы в формулах (3.12) и (3.1), получим связь между силой роста и годовой процентной ставкой: $PV(1+r) = PVe^{\delta n}$, получим:

$$r = e^{\delta} - 1 \quad \text{или} \quad \delta = \ln(1+r). \qquad (3.13)$$

Конвертация валюты и наращение сложными процентами. Рассмотрим финансовую операцию следующего вида: обмен СКВ в количестве $\overline{P}$ на рубли, наращение в течение времени n на полученную сумму P сложных процентов m раз в год по годовой ставке $r^{(m)}$ и конвертирование наращенной суммы F в исходную валюту, получая при этом сумму $\overline{F}$.

Таким образом, используется схема:

$$\overline{P}(\text{СКВ}) \to P(\text{руб}) \xrightarrow{r^{(m)}} F(\text{руб}) \to \overline{F}(\text{СКВ}).$$

Обозначим через K_0 курс покупки СКВ в начале финансовой операции, через K_n курс продажи СКВ в конце финансовой операции. Тогда $P = \overline{P} \cdot K_0$, $F = P\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}$, $\overline{F} = \frac{F}{K_n}$, и, следовательно,

$$\overline{F} = \frac{K_0}{K_n}\overline{P}\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}. \qquad (3.14)$$

Обозначим, $k_n = \frac{K_n}{K_0}$, тогда из равенства $(1+\overline{r})^n = \frac{1}{k_n}\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}$,

следует, что доходность $\overline{r}$ такой операции в виде годовой ставки сложных процентов равна величине

$$\overline{r} = \frac{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m}}{\sqrt[n]{k_n}} - 1. \qquad (3.15)$$

Если $m = 1$, $r^{(m)} = r^{(1)} = r$, получаем $\overline{r} = \frac{1+r}{\sqrt[n]{k_n}} - 1.$

Если $k_n = \frac{K_n}{K_0} < 1$, то доходность $\overline{r}$ превышает ставку r. При $k_n = (1+r)^n$ имеем нулевую доходность операции.

Пример 3.13. Вкладчик может поместить свои денежные средства в долларах на один год на валютном депозите под 8 % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов или в другом банке на рублевом депозите под 14% с ежемесячным начислением процентов. Как лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока составляет 29 р. 30 коп., а ожидаемый курс продажи через год – 30 р. 10 коп.

Решение. Вычислим коэффициент наращения по валютному вкладу $\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4=1{,}082$ и по рублевому вкладу – $\left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{12}=1{,}149$. Сравним

$$k_n=\frac{K_n}{K_0}=\frac{30{,}1}{29{,}3}=1{,}027 \text{ с величиной } \frac{\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4}{\left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{12}}=\frac{1{,}082}{1{,}149}=0{,}94.$$

Следовательно, денежные средства выгоднее поместить на валютном депозите.

Налоги, инфляция и наращение сложными процентами. Пусть на капитал P по истечении n лет начислены сложные проценты по годовой номинальной ставке $r^{(m)}$. Величина наращенной суммы за n лет находится по формуле

$$F_n=P\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}=Pa^n. \tag{3.16}$$

В этом случае налог начисляется на все полученные проценты один раз за весь срок. При ставке налога q, сумма налога составит

$$Q=\left(F_n-P\right)q=P\left(a^n-1\right)q, \tag{3.17}$$

следовательно, после уплаты налога наращенная сумма составит

$$\overline{F_n}=F_n-Q=F_n-\left(F_n-P\right)q=P\left(a^n\left(1-q\right)+q\right). \tag{3.18}$$

При начислении процентов по истечении каждого года и налог начисляется за каждый год.

Налог за первый год составит:

$$Q^{(1)} = (F_1 - P)q = P(a-1)q,$$

за второй год:

$$Q^{(2)} = (F_2 - F_1)q = Pa(a-1)q = aQ^{(1)},$$

за третий год:

$$Q^{(3)} = (F_3 - F_2)q = Pa^2(a-1)q = aQ^{(2)},$$

за k-ый год $(2 \le k \le n)$ величину налога можно найти, используя рекуррентное равенство

$$Q^{(k)} = aQ^{(k-1)}. \tag{3.19}$$

Очевидно, что

$$Q^{(1)} + Q^{(2)} + \ldots + Q^{(n)} = (F_n - P)q = Q,$$

т.е. численно равен налогу, вычисленному по формуле (3.17).

Пример 3.14. На вклад 1 млн. р. по истечению четырех лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 16 % , исходя из поквартальной схемы начисления. Определите наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога 12 %.

Решение.

$m = 4, r^{(4)} = 0{,}16$, то $a = \left(1 + \dfrac{0{,}16}{4}\right)^4 = 1{,}169$

Наращенная сумма без уплаты налогов $F_4 = 1 \cdot (1{,}169)^4 = 1{,}368$ млн. р.

Найдем величину налога на проценты

$$Q = (1{,}368 - 1)0{,}12 = 0{,}044 \text{ млн.р.}$$

Наращенная сумма после уплаты налогов составит

$$\overline{F_4} = 1{,}368 - 0{,}044 = 1{,}324 \text{ млн.р.}$$

Пример 3.15. На вклад 40 тыс. р. по истечении 3 лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной учетной ставке 28 %, исходя из ежеквартальной схемы начисления. После уплаты налога на проценты величина наращенной суммы составила 88,891 тыс. р. Определите ставку налога на проценты, если налог на все полученные проценты был выплачен один раз в конце срока.

Решение. Наращенная сумма без учета выплаты налога составит

$$FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = \frac{40}{\left(1 - \frac{0{,}28}{4}\right)^{12}} = 95{,}557 \text{ тыс. р.}$$

Наращенная сумма с учетом выплаты налога на проценты составит $\overline{FV} = FV - q(FV - PV)$, поэтому

$$q = \frac{FV - FV_1}{FV - PV} = \frac{95{,}557 - 88{,}891}{95{,}557 - 40} = 0{,}12.$$

Пусть на капитал P в течение n лет начисляются сложные проценты и индекс цен за это время равен $I_p^{(n)}$. По формуле (3.16) $F_n = Pa^n$, но с учетом инфляции получим:

$$\overline{F_n} = \frac{Pa^n}{I_p^{(n)}} \qquad (3.20)$$

Пример 3.16. Банк предлагает клиентам помещать деньги на депозит на один год под 24 % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Найдите реальную доходность такого предложения для клиентов банка, если ежемесячный темп инфляции прогнозируется равным 1 %.

Решение.

$$\overset{-(4)}{r}_{real} = 4\left(\left(1+\frac{0,24}{4}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{(1+0,01)^{12}}}-1\right)=0,115.$$

Таким образом, реальная доходность при помещении денег на депозит будет составлять 11,5 % годовых.

Замена платежей и сроков выплат. При любой замене платежей должен выполняться принцип *финансовой эквивалентности*, соблюдение которого обосновывается составлением уравнения. Если платеж P_1 со сроком n_1 надо заменить платежом P_0 со сроком n_0 при использовании сложной процентной ставки r, то *уравнение эквивалентности* имеет вид:

- $P_0 = P_1(1+r)^{n_0-n_1}$, если $n_0 > n_1$,
- $P_0 = \dfrac{P_1}{(1+r)^{n_1-n_0}}$, если $n_0 > n_1$.

Три вида уравнения можно объединить в одно: для любых сроков n_0, n_1 должно выполняться

$$\frac{P_0}{(1+r)^{n_0}} = \frac{P_1}{(1+r)^{n_1}}. \tag{3.21}$$

Вывод: для эквивалентной замены платежей необходимо, чтобы их приведенные стоимости совпадали.

Рассмотрим более общую ситуацию, когда платежи $P_1, P_2, \ldots, P_m$, выплачиваемые через время $n_1, n_2, \ldots, n_m$, заменяются одним платежом P_0 с выплатой через время n_0.

Тогда *уравнение эквивалентности* имеет вид:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k(1+r)^{n_0-n_k} \text{ или } \frac{P_0}{(1+r)^{n_0}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{P_k}{(1+r)^{n_k}}. \tag{3.22}$$

Пример 3.27. Согласно контракту господин обязан уплатить 20, 30 и 50 тыс. р. через 1 год, 2 года и 4 года. Однако, он хочет вернуть долг одним платежом через а) 3 года, б) 2 года. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 12 %.

Решение. Согласно формуле (3.22), имеем:

а) $P_0 = 20(1+0{,}12)^{3-1} + 30(1+0{,}12)^{3-2} + 50(1+0{,}12)^{3-4} = 103{,}33$ тыс.р.

б) $P_0 = 20(1+0{,}12)^{2-1} + 30(1+0{,}12)^{2-2} + 50(1+0{,}12)^{2-4} = 92{,}25$ тыс.р.

3.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ В АУДИТОРИИ

Задача 3.1.1. Вы имеете возможность получить кредит либо на условиях 36 % годовых с ежемесячным начислением сложных процентов, либо на условиях 40% с ежеквартальным начислением сложных процентов. Какой вариант предпочтительнее, если выплата производится единовременно с погашением кредита?

Задача 3.1.2. Рассчитайте будущую стоимость облигации номиналом 100 тыс. р., выпущенной на 7 лет, если первые 3 года проценты начисляются по ставке 17 % годовых, а в остальные 4 – по ставке 22 % годовых.

Задача 3.1.3. Вексель учтен за 24 месяца до срока погашения. При этом владелец получил 0,8 от написанной на векселе суммы. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен этот вексель?

Задача 3.1.4. В настоящее время фирма располагает деньгами и готова положить их на депозит единым вкладом, чтобы через 12 лет он достиг 5000 тыс. р. Определите необходимую сумму текущего вклада, если ставка процента по нему составляет 12 % годовых и проценты начисляются каждые полгода.

Задача 3.1.5. По облигации номиналом 100 тыс. р., выпущенной на 6 лет предусмотрен порядок начисления процентов: в первый год – 10 %, а два последующих – 20 %, в оставшиеся три года –25 %. Найдите будущую стоимость облигации.

Задача 3.1.6. За какое время до срока погашения был учтен вексель на сумму 50 тыс. р., если предъявитель получил 30 тыс. р. и дисконтирование по номинальной учетной ставке 24 % годовых производилось поквартально?

Задача 3.1.7. У вас есть возможность выбора между получением 30 тыс. р. через год или 72 тыс. р. через 6 лет. Каков ваш выбор, если есть возможность поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 12 %.

Задача 3.1.8. Определите номинальную учетную ставку, если эффективная учетная ставка 36 % и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществлялось помесячно.

Задача 3.1.9. Банк предоставил ссуду на 39 месяцев под 16 % годовых с полугодовым начислением процентов по смешанной схеме. Определите эквивалентную простую процентную ставку.

Задача 3.1.10. На вклад начисляются сложные проценты: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 15 %.

Задача 3.1.11. Номинальная процентная ставка, лишь компенсирующая при наращении действие инфляции, составляет 52 % годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

Задача 3.1.12. На выделенный кредит в размере 90 тыс. р. в течение 3 лет будут начисляться сложные проценты: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какую номинальную процентную ставку необходимо установить, чтобы происходило реальное наращение капитала по процентной ставке 24 % годовых, если ожидается темп инфляции 14 % в год? Определите наращенную сумму, которую необходимо будет вернуть.

Задача 3.1.13. На какой срок при годовом темпе инфляции 18 % необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под номинальную процентную ставку 44 % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов, чтобы она реально увеличилась в 1,5 раза.

Задача 3.1.14. Вкладчик может свои свободные денежные средства в долларах на один год поместить в одном банке на валютном депозите под 10 % годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов или в другом банке эту же сумму поместить на рублевом депозите под 14 % годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Как ему лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока составляет 2 – 8 р. 25 коп, а ожидаемый курс продажи через год – 29 р. 41 коп.?

3.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.2.1. Вексель учитывается в банке за два года до его погашения по сложной учетной ставке 32 % годовых. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной учетной ставки, если банк производит поквартальное дисконтирование и удерживает комиссионные 4 % от суммы, выплачиваемой за вексель.

Задача 3.2.2. Платеж 160 тыс.р. со сроком оплаты через 4 года заменяется на четыре равных платежа с выплатами через 2, 4, 6.и 7 лет. Какова величина этих платежей, если в расчетах применяется непрерывная ставка с силой роста 20 %?

Кредит в размере 180 тыс.р. выдается сроком на3 года при условии начисления непрерывных процентов. Какова должна быть непрерывная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции в виде силы роста составляла 24 %? Чему будет равна погашаемая сумма? Расчетный индекс цен за срок кредита принимается равным 1,9.

Задача 3.2.3. Банк учитывает вексель за 300 дней по сложной учетной ставке 24 % при временной базе 360 дней. Какова простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, чтобы обеспечить получение банком такого же дохода? При выдаче кредита используется временная база 365 дней.

Задача 3.2.4. Некоторая сумма в долларах США обменивается на рубли, после чего помещается на рублевый депозит на 2 года 9 месяцев под учетную ставку 24 % годовых с ежегодным начислением сложных процентов. Полученная наращенная сумма опять конвертируется в доллары США. Определите доходность такой финансовой операции в виде годовой эффективной учетной ставки, если курс покупки долларов на начало срока – 29 руб. 90 коп., а курс продажи через 2 года 9 месяцев – 31 руб.10 коп. и начисление процентов осуществлялось: а) по схеме сложных процентов, б) по смешанной схеме.

ТЕМА 4. ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ

Виды денежных потоков. Важный элемент финансовых расчетов – оценка денежного потока $N_1, N_2, \ldots N_n$, генерируемого в течение ряда временных периодов в результате реализации какого-либо проекта. Для простоты будем считать, что все элементы N_j, $j = \overline{1,n}$ – однонаправлены, т. е. нет чередования притоков и оттоков денежных средств. Также будем считать, что поступления не распределены внутри периода, а сконцентрированы на одной из его границ: либо в начале, либо в конце. В первом случае поток называется потоком *пренумерандо*, или *авансовым* (рис. 4.1), во втором – потоком *постнумерандо* (рис. 4.2).

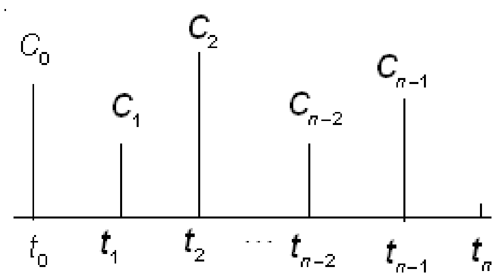

Рис. 4.1. Поток пренумерандо

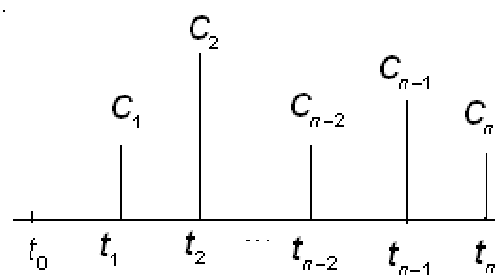

Рис. 4. 2. Поток постнумерандо

Оценка денежного потока может выполняться в рамках решения двух задач: а) *прямой*, т. е. проводится оценка с позиции будущего (реализуется схема наращения), б) *обратной*, т. е. проводится оценка с позиции настоящего (реализуется схема дисконтирования). В результате решения этих задач для денежного потока вычисляется одна из двух обобщающих характеристик: будущая или текущая стоимость потока.

При оценке денежного потока предполагается, что анализ ведется с позиций «разумного инвестора», т.е. инвестора, не просто накапливающего полученные денежные средства, а инвестирующего их с целью получения дополнительного дохода. Поэтому при оценке потоков предполагается *капитализация по схеме сложных процентов*.

Частным случаем денежного потока является *аннуитет (рента)*: однонаправленный поток, в котором длительности всех периодов равны между собой.

Любое денежное поступление называется *членом ренты*, а величина постоянного временного интервала между двумя последовательными денежными поступлениями называется *периодом аннуитета (периодом ренты)*.

Если число периодов ренты ограничено, аннуитет называется *срочным*. Если в течение каждого периода начисления процентов происходят p раз, то аннуитет называется p-*срочным*. Интервал времени от начала первого периода до конца последнего периода называется *сроком аннуитета*.

Аннуитет называется *постоянным*, если все денежные поступления равны между собой.

Оценка постоянного аннуитета постнумерандо. *Прямая задача* оценки срочного аннуитета при заданных величинах регулярного поступления (A) и процентной ставке (r) предполагает оценку будущей стоимости аннуитета (FV_{pst}^{a}). *Наращенный денежный поток* (постнумерандо) имеет вид

$$A(1+r)^{n-1}, A(1+r)^{n-2}, \ldots A(1+r), A$$

Переписанный в обратном порядке ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+r)$ и первым членом A. Тогда будущая стоимость аннуитета с использованием формулы суммы n членов геометрической прогрессии равна

$$FV_{pst}^{a} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{k-1} = A\frac{(1+r)^{n}-1}{r}. \qquad (4.1)$$

Множитель $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ в формуле (4.1) называется *коэффициентом наращения аннуитета (ренты)*.

Экономический смысл коэффициента наращения аннуитета заключается в следующем: он показывает, чему будет равна с позиций будущего суммарная величина срочного аннуитета с регулярными денежными поступлениями в одну денежную единицу к концу срока его действия с заданной процентной ставкой r.

Пример 4.1. Клиент в конце каждого года вкладывает 5 тыс. р. в банк, выплачивающий сложные проценты по ставке 9% годовых. Определим сумму, которая будет на счете через: а) 5 лет, б) 9 лет.

Решение. а) Такой вариант размещения денег является срочной рентой постнумерандо, член которой $A=5$, срок ренты $n=5$, процентная ставка $r=0{,}09$, поэтому:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{(1+r)^n-1}{r}=5\frac{(1+0{,}09)^5-1}{0{,}09}=29{,}9235 \text{ тыс. р.,}$$

б) $A=5$, $n=9, r=0{,}09$:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{(1+r)^n-1}{r}=5\frac{(1+0{,}09)^9-1}{0{,}09}=65{,}105 \text{ тыс.р.}$$

Если r – годовая процентная ставка, а начисление сложных процентов происходит m раз в течение базового периода, то формула для нахождения *суммы наращенного денежного потока* имеет вид:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1} \qquad (4.2)$$

Пример 4.2. Клиент в конце каждого года вкладывает 5 тыс. р. в банк, выплачивающий сложные проценты по ставке 12 % годовых: а) ежегодно, б) по полугодиям, в) ежеквартально. Определим сумму, которая будет на счете через 5 лет.

Решение. а) $A=5, n=5, m=1$, поэтому:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{(1+r)^{n}-1}{r}=5\cdot\frac{(1+0{,}12)^{5}-1}{0{,}12}=31{,}764 \text{ тыс. р.}$$

б) $A=5, n=5, r=0{,}12, m=2$, поэтому:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}=5\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{5\cdot 2}-1}{\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2}-1}=31{,}992 \text{ тыс. р.}$$

в) $A=5, n=5, r=0{,}12, m=4$, поэтому:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}=5\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{5\cdot 4}-1}{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4}-1}=32{,}114 \text{ тыс. р.}$$

Если в течение базового периода денежные поступления происходят p раз и проценты начисляются m раз за период, получаем самую общую схему вычисления *будущей стоимости аннуитета постнумерандо*:

$$FV_{pst}^{a}=A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}. \qquad (4.3)$$

Пример 4.3. На полугодовые взносы в банк в размере 3 тыс. р. по схеме постнумерандо банк начисляет ежеквартально сложные проценты по номинальной процентной ставке 24 % годовых. Определим, какая сумма будет на счете через два года.

Решение. В рассматриваемом примере $A=3, n=2, r=0{,}24, m=4, p=2$ поэтому:

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 3\frac{\left(1+\frac{0,24}{4}\right)^{4\cdot 2}-1}{\left(1+\frac{0,24}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1} = 14,413 \text{ тыс. р.}$$

Обратная задача оценки срочного аннуитета подразумевает оценку стоимости ренты с позиций настоящего времени, т. е. на момент начала нулевого периода. *Дисконтированный денежный поток* (в аннуитете постнумерандо) является геометрической прогрессией и имеет вид

$$\frac{A}{(1+r)}, \frac{A}{(1+r)^2}, \ldots, \frac{A}{(1+r)^n}.$$

Тогда *настоящая стоимость* аннуитета с использованием формулы суммы n членов геометрической прогрессии равна

$$PV_{pst}^{a} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}. \qquad (4.4)$$

Множитель $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ в формуле (4.4) называется *коэффициентом дисконтирования аннуитета (ренты).*

Экономический смысл коэффициента дисконтирования аннуитета состоит в следующем: он показывает, чему будет равна с позиций текущего момента суммарная величина аннуитета с регулярными денежными поступления в размере одной денежной единицы к концу срока его действия с заданной процентной ставкой r.

Пример 4.4. Определите какую сумму клиент должен положить в банк, выплачивающий сложные проценты по ставке 9 % годовых, чтобы иметь возможность в конце каждого года снимать со счета по 5 тыс. р. в течение а) 5 лет, б) 9 лет.

Решение. а) Такой вариант размещения денег является рентой постнумерандо, член которой равен $A = 5, n = 5, r = 0{,}09$, поэтому текущая стоимость аннуитета

$$PV_{pst}^{a} = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 5\cdot\frac{1-(1+0{,}09)^{-5}}{0{,}09} = 5\cdot 3{,}889735 = 19{,}448 \text{ тыс. руб.}$$

б) $A = 5, n = 9, r = 0{,}09$

$$PV_{pst}^{a} = A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 5\cdot\frac{1-(1+0{,}09)^{-9}}{0{,}09} = 5\cdot 5{,}9952 = 29{,}976 \text{ тыс. руб.}$$

Если сложные проценты начисляются m раз за базовый период, то сумма приведенного денежного потока постнумерандо равна:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m}-1} = A\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\cdot n}-1}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}}. \qquad (4.5)$$

Если сложные проценты начисляются m раз, а поступления происходят p раз за базовый период то сумма приведенного денежного потока постнумерандо равна:

$$PV_{pst}^{a} = A\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\cdot n}-1}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}} \qquad (4.6)$$

Пример 4.5. Страховая компания, заключив на 3 года договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 10 тыс.р. в конце каждого квартала. Эти взносы компания помещает в банк под 12 % годовых. Найдем приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если проценты начисляются: а) ежеквартально, б) ежемесячно.

Решение. а) Используя формулу (4.6), где $n = 3, m = 4, p = 4$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = 10\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{-3\cdot 4} - 1}{1-\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{\frac{4}{4}}} = 102{,}523 \text{ тыс. р.}$$

б) $n = 3, m = 12, p = 4$

$$PV_{pst}^{a} = 10\frac{\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{-3\cdot 12} - 1}{1-\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{\frac{12}{4}}} = 102{,}237 \text{ тыс. р.}$$

Пример 4.6. Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 250 тыс. р. с этой целью в конце каждого года фирма предлагает вносить по 30 тыс. р. в банк под 12 % годовых. Найдите срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты: а) ежегодно, б) по полугодиям, в) ежемесячно.

Решение. Выражая параметр n из формулы будущей стоимости

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1},$$

получаем

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV_{pst}^{a}}{A}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right) + 1\right)}{m \cdot \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}.$$

а) При $p = 1, m = 1$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{250}{30}0{,}12 + 1\right)}{\ln(1+0{,}12)} = 6{,}116 \text{ года.}$$

б) При $p = 1, m = 2$

$$n=\frac{\ln\left(\frac{250}{30}\left(\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2}-1\right)+1\right)}{2\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)}=\frac{\ln\left(\frac{250}{30}\left((1+0{,}06)^{2}-1\right)+1\right)}{2\cdot\ln(1+0{,}06)}=6{,}075.$$

в) При $p=1, m=12$

$$n=\frac{\ln\left(\frac{250}{30}\left(\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12}-1\right)+1\right)}{12\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)}=\frac{\ln\left(\frac{250}{30}\left((1+0{,}01)^{12}-1\right)+1\right)}{12\cdot\ln(1+0{,}01)}=6{,}039.$$

Из расчетов видно, чем чаще начисляются проценты, тем меньший срок потребуется для создания фонда.

Оценка постоянного аннуитета пренумерандо. В аннуитете пренумерандо денежные поступления происходят в начале каждого периода, поэтому количество периодов начисления процентов на один больше, чем в аннуитете постнумерандо. Для срочного аннуитета пренумерандо с регулярными денежными поступлениями, равными *A*, и процентной ставкой *r*, наращенный денежный поток имеет вид:

$$A(1+r)^{n},\, A(1+r)^{n-1},\ldots\, A(1+r)^{2},\, A(1+r)\,,$$

поэтому

$$FV_{pre}^{a}=(1+r)\cdot FV_{pst}^{a}\,. \qquad (4.7)$$

Аналогично для аннуитета пренумерандо при начислении процентов m раз в течение базового периода получим:

$$FV_{pre}^{a}=FV_{pst}^{a}\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}. \qquad (4.8)$$

Для p-срочных аннуитетов можно вывести следующие формулы:

$$FV_{pre}^{a}=FV_{pst}^{a}\cdot(1+r)^{\frac{1}{p}}; \qquad (4.9)$$

$$FV_{pre}^{a}=FV_{pst}^{a}\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}. \qquad (4.10)$$

Для расчета *приведенных стоимостей* различных типов p-срочных аннуитетов пренумерандо можно воспользоваться формулами:

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot (1 + r), \quad (4.11)$$

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}, \quad (4.12)$$

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot (1 + r)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.13)$$

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}. \quad (4.14)$$

Пример 4.6. В начале каждого полугодия делается очередной взнос в размере 20 тыс. р. Банк устанавливает номинальную процентную ставку 16 %. Найдем сумму на счете по истечении трех лет, если начисление сложных процентов происходит: а) ежеквартально, б) каждые полгода.

Решение. В задаче требуется оценить будущую стоимость аннуитета пренумерандо. Используя формулу (4.10), получим:

в случае а) $A = 20, n = 3, m = 4, p = 2$, поэтому

$$FV_{pre}^{a} = 20\frac{\left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4\cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1}(1 + 0,04)^{\frac{4}{2}} = 159,33 \text{ тыс. р.}$$

в случае б) $A = 20, n = 3, m = 2, p = 2$, поэтому

$$FV_{pre}^{a} = 20\frac{\left(1 + \frac{0,16}{2}\right)^{2\cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0,16}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1}(1 + 0,08) = 158,455 \text{ тыс. р.}$$

Метод депозитной книжки. Метод депозитной книжки заключается в следующем: сумма, положенная на депозит, приносит доход в виде процентов; при снятии с депозита некоторой суммы базовая величина, с которой начисляются проценты, уменьшается. Текущая стоимость аннуитета – это величина депозита с общей суммой причитающихся процентов, ежегодно уменьшающаяся на равные суммы. Эта сумма годового платежа включает в себя начисленные за очередной период проценты, а также некоторую часть основной суммы долга. Таким образом, погашение основного долга осуществляется постепенно в течение всего срока действия аннуитета. Структура годового платежа постоянно меняется: в начальные периоды в нем преобладают начисленные за очередной период проценты, с течением времени доля процентных платежей постоянно уменьшается и повышается доля погашаемой части основного долга.

Пример 4.7. В банке получена ссуда 100 тыс. р. на пять лет под 13 % годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать надо равными суммами в конце каждого года. Требуется оценить величину годового платежа.

Решение. Для банка данный контракт представляет собой инвестицию в размере 100 тыс. р. В дальнейшем в течение пяти лет банк будет ежегодно получать в конце года сумму A, причем каждый годовой платеж будет включать проценты за истекший год и часть основной суммы долга. Так как в течение первого года заемщик пользовался всей суммой, то платеж в конце года состоит из двух частей: процентов за год в сумме 13 тыс. р. и погашаемой части долга в сумме $(A-13)$. В следующем году расчет будет повторен при условии, что размер кредита, которым пользуется заемщик, составит уже меньшую сумму по сравнению с первым годом, а именно: $(100-(A-13))$. Следовательно, с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает. Для нахождения величины годового платежа А можно воспользоваться формулой (4.6):

$$PV_{pst}^{a} = A \cdot \frac{1-\left(1+r\right)^{-n}}{r},$$

$$100 = A \cdot \frac{1-(1+0,13)^{-5}}{0,13} = A \cdot 3,5172,$$

следовательно, $A = 28,43$ тыс.р.

Динамика платежей (в тыс. р.) приведена в таблице:

Год	Остаток ссуды на начало года	Годовой платеж	Проценты за год	Погашенная часть долга	Остаток на конец года
1	100	28,43	13	15,43	84,57
2	84,57	28,43	10,994	17,435	67,134
3	67,134	28,43	8,727	19,702	47,431
4	47,431	28,43	6,166	22,263	25,167
5	25,167	28,43	3,271	25,167	0

Бессрочный аннуитет. Аннуитет называют *бессрочным*, если денежные поступления продолжаются достаточно длительное время. Математически это означает, что $n \to \infty$. На практике бессрочным считается аннуитет, рассчитанный на 50 и более лет. Бессрочный аннуитет также называют *вечной рентой*.

В этом случае задача нахождения будущей стоимости ренты смысла не имеет, однако, обратная задача определения приведенной стоимости аннуитета имеет решение. Поток платежей в постоянном бессрочном аннуитете при одном денежном поступлении *A* за период, являющийся базовым для начисления процентов по ставке *r*, представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a = \frac{A}{1+r}$ и знаменателем $q = \frac{1}{1+r}$. Для бессрочного аннуитета постнумерандо, используя (4.6) при $n \to \infty$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{k}} = \frac{A}{r}. \tag{4.15}$$

Пример 4.8. Определите текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежегодным поступлением 3,9 тыс. р., если процент по срочным вкладам равен 13 % годовых.

Решение. По формуле (4.15) $PV_{pst}^{a} = \frac{A}{r} = \frac{3{,}9}{0{,}13} = 30$ тыс.р.

Следовательно, если аннуитет предлагается по цене, не превышающей 30 тыс.р., он представляет собой выгодную инвестицию.

Если денежные поступления осуществляются p раз за базовый период при начислении сложных процентов m раз за базовый период, получим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}. \tag{4.16}$$

При определении *приведенной* стоимости бессрочного аннуитета с денежными поступлениями p раз за базовый период и непрерывным начислением процентов по ставке δ получим формулу:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}. \tag{4.17}$$

Чистый приведенный поток. Любая предпринимательская деятельность, как правило, связана с инвестициями. Инвестиции необходимы для обновления существующей материальной базы производства, расширения объемов производства, освоения новых видов деятельности и т. д. Привлекательность инвестиционного проекта можно оценить различными показателями.

В качестве основного измерителя конечного абсолютного результата инвестирования большое распространение получил чистый приведенный доход.

Пусть капиталовложения и доходы представлены в виде потока платежей $A_1, A_2, \dots A_n$, тогда *чистый приведенный доход* (NPV) находится как современная стоимость этого потока, определенная на начало действия проекта:

$$NPV = \sum_t A_t v^t \, , \qquad (4.18)$$

где A_t – размер платежа в году t; $v = \frac{1}{1+r}$ – дисконтный множитель по ставке r.

В данной формуле члены потока платежей могут быть как положительными (доходы), так и отрицательными (инвестиционные затраты) величинами.

Данный показатель позволяет определить, благоприятен или нет чистый баланс этих сумм. Если $NPV > 0$, то проект является рентабельным, если $NPV < 0$, то проект следует отвергнуть как нерентабельный. Этот вывод зависит от применяемой ставки дисконтирования: при одном значении ставки проект может быть рентабельным, а при более высокой ставке – нерентабельным.

Пример 4.11. Для покупки оборудования по производству нового продукта требуются капиталовложения в размере 1000 тыс. р. Ожидаемый ежегодный доход от реализации продукта равен 200 тыс. р. Срок инвестиционного проекта – 7 лет, ставка дисконтирования – 10 %. Определите чистый приведенный доход проекта.

Решение. Чистая текущая стоимость поступлений определяется как приведенная стоимость постоянного аннуитета постнумерандо минус капиталовложения в проект:

$$NPV = 200\frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} - 1000 = 974 - 1000 = -26 \text{ тыс. р.}$$

Отрицательный результат показывает, что проект является нерентабельным.

Если рассмотреть аналогичный проект на 8 лет, то проект окажется рентабельным:

$$NPV = 200\frac{1-(1+0{,}1)^{-8}}{r} - 1000 = 1067{,}7 - 1000 = 67{,}7 \text{ тыс. р.}$$

Если принять требуемую ставку доходности в 12 %, то этот проект на 8 лет будет нерентабельным.

Таким образом, инвестиционный проект, приемлемый для одного инвестора, может оказаться неприемлемым для другого, требующего более высокую ставку доходности.

Внутренняя норма доходности (internal rate of return, IRR) – это тот уровень доходности, использование которого в качестве ставки дисконтирования применительно к положительным и отрицательным денежным потокам данного инвестиционного проекта, дает нулевую чистую текущую стоимость. Иначе говоря, при начислении на сумму инвестиций процентов по ставке, равной внутренней норме доходности, обеспечивается получение во времени дохода, эквивалентного инвестициям.

Уравнение для поиска внутренней нормы доходности имеет вид

$$NPV = 0, \qquad (4.19)$$

где $v = \dfrac{1}{1+IRR}$.

Это означает, что дисконтированная величина доходов в точности равна дисконтированной величине инвестиций.

Внутренняя норма доходности меняется в зависимости от срока инвестиций и графика денежных потоков и является уникальной характеристикой каждого инвестиционного проекта.

Пример 4.12. Вычислите внутреннюю норму доходности при следующих условиях: инвестиции в проект составляют 1000 тыс. р., ожидаемый ежегодный доход от реализации проекта – 300 тыс. р., срок проекта – 7 лет.

Решение. Дисконтированная величина доходов вычисляется по формуле: $300(v+v^2+\ldots+v^7)$. Тогда для нахождения внутренней нормы доходности требуется решить уравнение:

$$300(v+v^2+\ldots+v^7)-1000=0$$

(это можно сделать, например, с помощью финансовых функций Excel, поскольку аналитическое решение невозможно, см. § 5.1.).

Корень этого уравнения $v=0{,}916$, тогда $IRR=\frac{1-v}{v}=0{,}0919$. Если требуемая норма доходности выше этого значения (например, как в примере 4.10, где $r=0{,}1$), то проект нерентабелен.

4.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ В АУДИТОРИИ

Задача 4.1.1. Клиент в конце каждого года вкладывает 5 тыс. р. в банк, выплачивающий сложные проценты по процентной ставке 20 % годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через а) 4 года, б) 7 лет, в) 10 лет?

Задача 4.1.2. Клиент в начале каждого года вкладывает 5 тыс. р. в банк, выплачивающий сложные проценты по процентной ставке 20 % годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через а) 4 года, б) 7 лет, в) 10 лет?

Задача 4.1.3. Какую сумму необходимо поместить в банк под процентную ставку 12 % годовых, чтобы в течении 6 лет снимать со счета в конце каждого квартала 4 тыс. р., исчерпав счет полностью, если проценты начисляются: а) ежегодно, б) ежемесячно, в) ежеквартально.

Задача 4.1.4. Какую сумму необходимо поместить в банк под процентную ставку 12 % годовых, чтобы в течении 6 лет снимать со счета в начале каждого квартала 4 тыс. р., исчерпав счет полностью, если проценты начисляются: а) ежегодно, б) ежемесячно, в) ежеквартально.

Задача 4.1.5. Клиент в течение 5 лет в начале каждого года делает вклады в банк в размере 10 тыс. р. под 20 % годовых. Определите величину накопленной суммы к концу 5-го года.

Задача 4.1.6. Клиент заключает с банком договор о выплате ему в течение 5 лет ежегодной ренты в размере 10 тыс. р. в начале каждого года. Какую сумму ему необходимо внести в банк в начале первого года, чтобы обеспечить эту ренту, исходя из годовой процентной ставки 20 %?

Задача 4.1.7. Определите наращенную к концу 5-ого года сумму вклада, если в конце каждого года вносятся взносы в размере 10 тыс. р. Наращение процентов производится по ставке 20 % годовых.

Задача 4.1.8. Клиент заключает с банком договор о выплате ему в течение 5 лет ежегодной ренты в размере 10 тыс. р. в конце каждого года. Какую сумму ему необходимо внести в начале первого года, чтобы обеспечить эту ренту, исходя из процентной ставки 20 % годовых?

Задача 4.1.9. Банк предлагает клиенту выплату ренты на следующих условиях: клиент вносит 10 тыс. р., а банк в течение 5 лет выплачивает ему в конце каждого года по 3 тыс. р. Определите доходность подобной операции.

Задача 4.1.10. Предполагается, что ссуда размером 5000 р. погашается ежемесячными платежами по 141,7 р. Рассчитать, через сколько лет произойдет погашение, если годовая процентная ставка 16 %.

Задача 4.1.11. Определите ежемесячные выплаты по займу в 10 тыс. р., взятому на 7 месяцев под 9 % годовых?

Задача 4.1.12. Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 7 лет в конце года поступают денежные суммы, первая из которых равна 3 тыс. р., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,2 тыс.р. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 10 % годовых.

4.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.2.1. Страховая компания заключила договор с предприятием на три года, установив годовой страховой взнос в 6 тыс. р. Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 25 % годовых. Определите сумму, которую получит страховая компания по такому контракту, если взносы будут поступать: а) в конце каждого года; б) равными долями в конце каждого полугодия в размере 3 тыс. р.; в) равными долями в конце каждого квартала в размере 1,5 тыс. р.

Задача 4.2.2. Работница заключает с предприятием контракт, согласно которому в случае ее постоянной работы на предприятии до выхода на пенсию (в 55 лет) предприятие обязуется перечислять в конце каждого года в течение 15 лет на счет работницы в банке одинаковые суммы, которые обеспечат ей после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в 3000 р. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должно перечислять предприятие, если работнице 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 12 %?

Задача 4.2.3. У молодого человека (24 года) появилась возможность окончить годичный курс обучения стоимостью 120 тыс. р. и занять более высокую должность. Насколько выше должна быть заработная плата в новой должности, чтобы молодой человек счел обучение целесообразным, если в настоящее время его годовая зарплата составляет 216 тыс. р. и он считает приемлемой для себя норму отдачи вложения 16 % годовых? В новой должности молодой человек собирается работать до выхода на пенсию, т.е. 40 лет. Как изменится ответ, если такую возможность обучения обдумывает мужчина 54 лет?

Задача 4.2.4. Перед выходом на пенсию господин Иванов хочет обеспечить себе дополнительный ежегодный доход в сумме 6 тыс.р. неограниченно долго. Какую сумму он должен поместить в банк, начисляющий сложные проценты по ставке 12 % годовых?

Задача 4.2.5. У вас имеется возможность инвестировать одинаковую сумму денег в один из проектов. Первый проект позволит получить бессрочную ренту постнумерандо с ежегодными выплатами 15 тыс. р. Второй проект в течение двух лет принесет соответственно 30 и 80 тыс. р. Какой вариант лучше, если процентная ставка составляет 24 % годовых. Можно ли так изменить процентную ставку, чтобы ответ изменился на противоположный?

Задача 4.2.6. Участок сдан в аренду на 20 лет, сумма годового платежа (схема постнумерандо) составляет 30 тыс. р. Рассчитайте текущую цену договора на момент его заключения, если сложная банковская ставка равна 25 % годовых.

Задача 4.2.7. За 5 лет необходимо накопить 20 тыс.р. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 500 рублей и процентная ставка 20 % годовых?

Задача 4.2.7. По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 5 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 3 тыс. р., а каждый следующий увеличивается на 15 %. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 20 % годовых.

Задача 4.2.8. Компания «Арендодатель» вложила собственные средства в строительство здания, относящегося к классу коммерческой недвижимости. Общий объем инвестиций составил 1.5 млн. р. Здание построено с целью сдачи его в аренду. Оцените чистую приведенную стоимость этой инвестиции в следующих предположениях.

- Эксплуатация здания будет производиться в бесконечном периоде. Ежегодная арендная плата составляет 400 тыс. р.
- Эксплуатация здания будет производиться в течение 10 лет, затем здание будет продано по остаточной стоимости 1 млн. р.

Действующая ставка по альтернативному вкладу одинакова на все временные периоды и составляет 10% годовых. Текущие затраты на содержание здания, а также налоговые выплаты не учитываются.

Задача 4.2.9. Банк открывает для компании депозитный счет на 15 лет с индивидуальным планом. Ежегодно по депозитному вкладу начисляется процентный платеж 10% годовых от вложенной суммы. Компания в текущем году вносит 500 тыс. р. В дальнейшем каждый год компания будет вносить дополнительную сумму. Причем, финансовый менеджер компании рассматривает 2 варианта взносов:

- каждый год на депозитный вклад вносится сумма 500 тыс. р.;

каждый год вносимая сумма увеличивается с учетом прогнозируемой инфляции в размере 3% годовых.

Оцените, сколько будет на счете компании через 15 лет. Сравните будущие суммы по двум вариантам взносов, объясните разницу. Рассчитайте величину ежегодных процентных выплат по депозиту.

Задача 4.2.10. Компания получает кредит у коммерческого банка в сумме 10 млн. р. на 3 года с ежемесячной выплатой процентов и частичной суммы в счет погашения кредита. Годовая кредитная ставка равна 12%. Она остается постоянной на протяжении всего кредитного периода. Банк предоставляет компании льготный период в течение первого года, когда ежемесячно выплачиваются только процентные платежи. Погашение кредита начинается с 13-го месяца равными платежами в течение оставшихся 2-х лет. Рассчитайте график погашения кредита и выплаты процентов по этому кредиту. Оцените структуру выплат компании банку, разделяя процентные выплаты и выплаты в погашение.

Задача 4.2.11. Компания вкладывает в текущий момент 2млн. р. в некоторый актив, который в течение ближайших 10 лет будет создавать положительные денежные потоки: 100 тыс. р. в первый год, далее каждый год денежная выплата будет возрастать на 100 тыс. р., в 10-м году выплата составит 1,2 млн. р. Ставка по альтернативному вкладу составляет 10% годовых.

- Рассчитайте чистую приведенную стоимость денежного потока, соответствующего указанным действиям компании.
- Постройте график зависимости чистой приведенной стоимости от ставки дисконтирования.
- Оцените внутреннюю норму доходности денежного потока.

Задача 4.2.12. Предположим, вам 18 лет и в 60 лет вы планируете выйти на пенсию. Уже сегодня вы озабочены размером пенсионных выплат, которые будут вам выплачиваться в пенсионном периоде вашей жизни. Вам хотелось бы увеличить ваши пенсионные выплаты в будущем. С этой целью вы открываете пенсионный счет. На этот счет ежегодно, в течение 42-х лет вы планируете делать взносы, равные по величине в течение всего предпенсионного периода. Процент, который будет начисляться по вашим пенсионным вложениям, составляет 7% годовых от остатка на пенсионном счете. После выхода на пенсию в течение 20 лет (до достижения вами 80-летнего возраста) вы хотели бы получать ежегодно сумму 120 тыс. р. Необходимо рассчитать, какую сумму ежегодно вы должны вносить на ваш пенсионный счет.

Задача 4.2.13. *Дифференцированные платежи* – это способ погашения кредита, при котором основная сумма долга выплачивается равными долями в течение всего срока погашения. При этом размер общего платежа каждый месяц уменьшается за счет уменьшения суммы начисленных процентов. *Аннуитетные платежи* – это способ погашения кредита, при котором выплаты устанавливаются периодически равными суммами через равные промежутки времени. Сумма аннуитетного платежа включает в себя основной долг и вознаграждение (проценты).

Условия предоставления кредита:

- сумма кредита – 600 000 р.;
- процентная ставка – 12 % годовых;
- срок действия кредитного договора – 6 месяцев;
- периодичность и срок выплат – ежемесячно, 10-ого числа;
- дата выдачи – 10 мая 2011 г.

Составьте график погашения кредита двумя способами (дифференцированные и аннуитетные платежи), сравните полученные результаты, сделать выводы.

Задача 4.2.14. Господин имеет возможность разместить на депозите свободные средства в размере 500 тыс. р. сроком на 1 год. Рассматриваются два банка: банк 1 предлагает доходность 9% годовых с начислением сложных процентов по полугодиям, банк 2 – 8,5 % с ежемесячным начислением сложных процентов. Система государственного страхования вкладов обеспечивает 100% - ную выплату не более 300 тыс. р. в каждом из этих банков. По некоторым причинам вклад в банке 1 не может превышать сумму, размещенную на депозите в банке 2.

- составьте математическую модель для нахождения оптимального размещения средств на депозитных счетах,
- найдите максимально возможное наращение капитала,

- проведите анализ на чувствительность оптимального решения, т.е. найдите допустимые пределы изменения ставок, не меняющие оптимального решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. – М., Инфра-М, 1997.
2. *Брусов П.*Н.*, Брусов П.П.,Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика. Учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2010.
3. *Ковалев В.В., Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2005.
4. *Ковалев В.В.* Практикум по анализу и финансовому менеджменту. – М.: Финансы и статистика, 2008.
5. *Малыхин В.И.* Финансовая математика: Учебное пособие для вызов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
6. *Погостинская Н.Н.* Финансовый менеджмент. Практикум: Учебное пособие. – СПб: СПбГУП, 2012.
7. Корпоративные финансы: Учебник / ред. М. В. Романовский, А. И. Вострокнутова. – М; СПб; Нижний Новгород: Питер, 2011.
8. *Теплова Т. В.* Инвестиции.– Юрайт-Издат, 2012 .
9. *Уланов В.А.* Сборник задач по курсу финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2000.
10. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. – М.: Издательский дом РАНХиГС, 2011.
11. *Шарп У., Александер Г.,Бейли Дж*. Инвестиции. – М., Инфра-М, 2010.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1. Порядковые номера дней в обычном году

	янв.	фев.	март	апр.	май	июнь	июль	авг	сент.	окт.	нояб	дек.
День	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Таблица 2. Порядковые номера дней в високосном году

	янв.	фев.	март	апр.	май	июнь	июль	авг.	сент.	окт.	нояб	дек.
День	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30		90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31		91		152		213	244		305		366

Таблица 3. Множитель наращения по сложным процентам

$$FM1(r,n) = (1+r)^n$$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
1	1,010	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090
2	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
3	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295
4	1,041	1,082	1,126	1,170	1,216	1,263	1,311	1,361	1,412
5	1,051	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539
6	1,062	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677
7	1,072	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828
8	1,083	1,172	1,267	1,369	1,478	1,594	1,718	1,851	1,993
9	1,094	1,195	1,305	1,423	1,551	1,690	1,839	1,999	2,172
10	1,105	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367
11	1,116	1,243	1,384	1,540	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580
12	1,127	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813
13	1,138	1,294	1,469	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066
14	1,150	1,320	1,513	1,732	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342
15	1,161	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,643
16	1,173	1,373	1,605	1,873	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970
17	1,184	1,400	1,653	1,948	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328
18	1,196	1,428	1,702	2,026	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717
19	1,208	1,457	1,754	2,107	2,527	3,026	3,617	4,316	5,142
20	1,220	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604
21	1,232	1,516	1,860	2,279	2,786	3,400	4,141	5,034	6,109
22	1,245	1,546	1,916	2,370	2,925	3,604	4,430	5,437	6,659
23	1,257	1,577	1,974	2,465	3,072	3,820	4,741	5,872	7,258
24	1,270	1,608	2,033	2,563	3,225	4,049	5,072	6,341	7,911
25	1,282	1,641	2,094	2,666	3,386	4,292	5,427	6,849	8,623
26	1,295	1,673	2,157	2,773	3,556	4,549	5,807	7,396	9,399
27	1,308	1,707	2,221	2,883	3,734	4,822	6,214	7,988	10,245
28	1,321	1,741	2,288	2,999	3,920	5,112	6,649	8,627	11,167
29	1,335	1,776	2,357	3,119	4,116	5,418	7,114	9,317	12,172
30	1,348	1,811	2,427	3,243	4,322	5,744	7,612	10,063	13,268
31	1,361	1,848	2,500	3,373	4,538	6,088	8,145	10,868	14,462
32	1,375	1,885	2,575	3,508	4,765	6,453	8,715	11,737	15,763
33	1,389	1,922	2,652	3,648	5,003	6,841	9,325	12,676	17,182
34	1,403	1,961	2,732	3,794	5,253	7,251	9,978	13,690	18,728
35	1,417	2,000	2,814	3,946	5,516	7,686	10,677	14,785	20,414
36	1,431	2,040	2,898	4,104	5,792	8,147	11,424	15,968	22,251
37	1,445	2,081	2,985	4,268	6,081	8,636	12,224	17,246	24,254
38	1,460	2,122	3,075	4,439	6,386	9,154	13,079	18,625	26,437
39	1,474	2,165	3,167	4,616	6,705	9,704	13,995	20,115	28,816
40	1,489	2,208	3,262	4,801	7,040	10,286	14,975	21,725	31,409
41	1,504	2,252	3,360	4,993	7,392	10,903	16,023	23,463	34,236
42	1,519	2,297	3,461	5,193	7,762	11,557	17,144	25,340	37,318
43	1,534	2,343	3,565	5,401	8,150	12,251	18,344	27,367	40,676
44	1,549	2,390	3,672	5,617	8,557	12,986	19,629	29,556	44,337
45	1,565	2,438	3,782	5,841	8,985	13,765	21,003	31,920	48,327
46	1,581	2,487	3,895	6,075	9,434	14,591	22,473	34,474	52,677
47	1,596	2,536	4,012	6,318	9,906	15,466	24,046	37,232	57,418
48	1,612	2,587	4,132	6,571	10,401	16,394	25,729	40,211	62,585
49	1,628	2,639	4,256	6,833	10,921	17,378	27,530	43,427	68,218
50	1,645	2,692	4,384	7,107	11,467	18,420	29,457	46,902	74,358

Таблица 3 (продолжение)

n	**10 %**	**11 %**	**12 %**	**13 %**	**14 %**	**15 %**	**16 %**
1	1,100	1,110	1,120	1,130	1,140	1,150	1,160
2	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346
3	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561
4	1,464	1,518	1,574	1,631	1,689	1,749	1,811
5	1,611	1,685	1,762	1,842	1,925	2,011	2,100
6	1,772	1,870	1,974	2,082	2,195	2,313	2,436
7	1,949	2,076	2,211	2,353	2,502	2,660	2,826
8	2,144	2,305	2,476	2,658	2,853	3,059	3,278
9	2,358	2,558	2,773	3,004	3,252	3,518	3,803
10	2,594	2,839	3,106	3,395	3,707	4,046	4,411
11	2,853	3,152	3,479	3,836	4,226	4,652	5,117
12	3,138	3,499	3,896	4,335	4,818	5,350	5,936
13	3,452	3,883	4,364	4,898	5,492	6,153	6,886
14	3,798	4,310	4,887	5,535	6,261	7,076	7,988
15	4,177	4,785	5,474	6,254	7,138	8,137	9,266
16	4,595	5,311	6,130	7,067	8,137	9,358	10,748
17	5,055	5,895	6,866	7,986	9,277	10,761	12,468
18	5,560	6,544	7,690	9,024	10,575	12,376	14,463
19	6,116	7,263	8,613	10,197	12,056	14,232	16,777
20	6,728	8,062	9,646	11,523	13,744	16,367	19,461
21	7,400	8,949	10,804	13,021	15,668	18,822	22,575
22	8,140	9,934	12,100	14,714	17,861	21,645	26,186
23	8,954	11,026	13,552	16,627	20,362	24,892	30,376
24	9,850	12,239	15,179	18,788	23,212	28,625	35,236
25	10,835	13,586	17,000	21,231	26,462	32,919	40,874
26	11,918	15,080	19,040	23,991	30,167	37,857	47,414
27	13,110	16,739	21,325	27,109	34,390	43,535	55,000
28	14,421	18,580	23,884	30,634	39,205	50,066	63,800
29	15,863	20,624	26,750	34,616	44,693	57,576	74,009
30	17,449	22,892	29,960	39,116	50,950	66,212	85,850
31	19,194	25,410	33,555	44,201	58,083	76,144	99,586
32	21,114	28,206	37,582	49,947	66,215	87,565	115,520
33	23,225	31,308	42,092	56,440	75,485	100,700	134,003
34	25,548	34,752	47,143	63,777	86,053	115,805	155,443
35	28,102	38,575	52,800	72,069	98,100	133,176	180,314
36	30,913	42,818	59,136	81,437	111,834	153,152	209,164
37	34,004	47,528	66,232	92,024	127,491	176,125	242,631
38	37,404	52,756	74,180	103,987	145,340	202,543	281,452
39	41,145	58,559	83,081	117,506	165,687	232,925	326,484
40	45,259	65,001	93,051	132,782	188,884	267,864	378,721
41	49,785	72,151	104,217	150,043	215,327	308,043	439,317
42	54,764	80,088	116,723	169,549	245,473	354,250	509,607
43	60,240	88,897	130,730	191,590	279,839	407,387	591,144
44	66,264	98,676	146,418	216,497	319,017	468,495	685,727
45	72,891	109,530	163,988	244,641	363,679	538,769	795,444
46	80,180	121,579	183,666	276,445	414,594	619,585	922,715
47	88,198	134,952	205,706	312,383	472,637	712,522	1070,349
48	97,017	149,797	230,391	352,992	538,807	819,401	1241,605
49	106,719	166,275	258,038	398,881	614,240	942,311	1440,262
50	117,391	184,565	289,002	450,736	700,233	1083,657	1670,704

Таблица 3 (продолжение)

n	**17 %**	**18 %**	**19 %**	**20 %**	**21 %**	**22 %**
1	1,170	1,180	1,190	1,200	1,210	1,220
2	1,369	1,392	1,416	1,440	1,464	1,488
3	1,602	1,643	1,685	1,728	1,772	1,816
4	1,874	1,939	2,005	2,074	2,144	2,215
5	2,192	2,288	2,386	2,488	2,594	2,703
6	2,565	2,700	2,840	2,986	3,138	3,297
7	3,001	3,186	3,379	3,583	3,798	4,023
8	3,512	3,759	4,021	4,300	4,595	4,908
9	4,108	4,436	4,785	5,160	5,560	5,987
10	4,807	5,234	5,695	6,192	6,728	7,305
11	5,624	6,176	6,777	7,430	8,140	8,912
12	6,580	7,288	8,064	8,916	9,850	10,872
13	7,699	8,599	9,596	10,699	11,918	13,264
14	9,008	10,147	11,420	12,839	14,421	16,182
15	10,539	11,974	13,590	15,407	17,449	19,742
16	12,330	14,129	16,172	18,488	21,114	24,086
17	14,427	16,672	19,244	22,186	25,548	29,384
18	16,879	19,673	22,901	26,623	30,913	35,849
19	19,748	23,214	27,252	31,948	37,404	43,736
20	23,106	27,393	32,429	38,338	45,259	53,358
21	27,034	32,324	38,591	46,005	54,764	65,096
22	31,629	38,142	45,923	55,206	66,264	79,418
23	37,006	45,008	54,649	66,247	80,180	96,889
24	43,297	53,109	65,032	79,497	97,017	118,205
25	50,658	62,669	77,388	95,396	117,391	144,210
26	59,270	73,949	92,092	114,476	142,043	175,936
27	69,346	87,260	109,589	137,371	171,872	214,642
28	81,134	102,967	130,411	164,845	207,965	261,864
29	94,927	121,501	155,189	197,814	251,638	319,474
30	111,065	143,371	184,675	237,376	304,482	389,758
31	129,946	169,177	219,764	284,852	368,423	475,505
32	152,036	199,629	261,519	341,822	445,792	580,116
33	177,883	235,563	311,207	410,186	539,408	707,741
34	208,123	277,964	370,337	492,224	652,683	863,444
35	243,504	327,997	440,701	590,668	789,747	1053,402
36	284,899	387,037	524,434	708,802	955,594	1285,150
37	333,332	456,703	624,076	850,562	1156,269	1567,883
38	389,998	538,910	742,651	1020,675	1399,085	1912,818
39	456,298	635,914	883,754	1224,810	1692,893	2333,638
40	533,869	750,378	1051,668	1469,772	2048,400	2847,038
41	624,626	885,446	1251,484	1763,726	2478,564	3473,386
42	730,813	1044,827	1489,266	2116,471	2999,063	4237,531
43	855,051	1232,896	1772,227	2539,765	3628,866	5169,788
44	1000,410	1454,817	2108,950	3047,718	4390,928	6307,141
45	1170,479	1716,684	2509,651	3657,262	5313,023	7694,712
46	1369,461	2025,687	2986,484	4388,714	6428,757	9387,549
47	1602,269	2390,311	3553,916	5266,457	7778,796	11452,810
48	1874,655	2820,567	4229,160	6319,749	9412,344	13972,428
49	2193,346	3328,269	5032,701	7583,699	11388,936	17046,362
50	2566,215	3927,357	5988,914	9100,438	13780,612	20796,562

Таблица 3 (продолжение)

n	**23 %**	**24 %**	**25 %**	**30 %**	**40 %**
1	1,230	1,240	1,250	1,300	1,400
2	1,513	1,538	1,563	1,690	1,960
3	1,861	1,907	1,953	2,197	2,744
4	2,289	2,364	2,441	2,856	3,842
5	2,815	2,932	3,052	3,713	5,378
6	3,463	3,635	3,815	4,827	7,530
7	4,259	4,508	4,768	6,275	10,541
8	5,239	5,590	5,961	8,157	14,758
9	6,444	6,931	7,451	10,605	20,661
10	7,926	8,594	9,313	13,786	28,926
11	9,749	10,657	11,642	17,922	40,496
12	11,991	13,215	14,552	23,298	56,694
13	14,749	16,386	18,190	30,288	79,372
14	18,141	20,319	22,737	39,374	111,120
15	22,314	25,196	28,422	51,186	155,568
16	27,446	31,243	35,527	66,542	217,795
17	33,759	38,741	44,409	86,504	304,914
18	41,523	48,039	55,511	112,455	426,879
19	51,074	59,568	69,389	146,192	597,630
20	62,821	73,864	86,736	190,050	836,683
21	77,269	91,592	108,420	247,065	1171,356
22	95,041	113,574	135,525	321,184	1639,898
23	116,901	140,831	169,407	417,539	2295,857
24	143,788	174,631	211,758	542,801	3214,200
25	176,859	216,542	264,698	705,641	4499,880
26	217,537	268,512	330,872	917,333	6299,831
27	267,570	332,955	413,590	1192,533	8819,764
28	329,112	412,864	516,988	1550,293	12347,670
29	404,807	511,952	646,235	2015,381	17286,737
30	497,913	634,820	807,794	2619,996	24201,432
31	612,433	787,177	1009,742	3405,994	33882,005
32	753,292	976,099	1262,177	4427,793	47434,807
33	926,550	1210,363	1577,722	5756,130	66408,730
34	1139,656	1500,850	1972,152	7482,970	92972,223
35	1401,777	1861,054	2465,190	9727,860	130161,112
36	1724,186	2307,707	3081,488	12646,219	182225,556
37	2120,748	2861,557	3851,860	16440,084	255115,779
38	2608,520	3548,330	4814,825	21372,109	357162,090
39	3208,480	4399,930	6018,531	27783,742	500026,926
40	3946,431	5455,913	7523,164	36118,865	700037,697
41	4854,110	6765,332	9403,955	46954,524	980052,775
42	5970,555	8389,011	11754,944	61040,882	1372073,885
43	7343,782	10402,374	14693,679	79353,146	1920903,439
44	9032,852	12898,944	18367,099	103159,090	2689264,815
45	11110,408	15994,690	22958,874	134106,817	3764970,741
46	13665,802	19833,416	28698,593	174338,862	5270959,038
47	16808,937	24593,436	35873,241	226640,520	7379342,653
48	20674,992	30495,860	44841,551	294632,676	10331079,714
49	25430,240	37814,867	56051,939	383022,479	14463511,600
50	31279,195	46890,435	70064,923	497929,223	20248916,240

Таблица 4. Множитель дисконтирования по сложным процентам

$$FM2(r,n)=(1+r)^{-n}$$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917
2	0,980	0,961	0,943	0,925	0,907	0,890	0,873	0,857	0,842
3	0,971	0,942	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772
4	0,961	0,924	0,889	0,855	0,823	0,792	0,763	0,735	0,708
5	0,952	0,906	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650
6	0,942	0,888	0,838	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596
7	0,933	0,871	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,584	0,547
8	0,924	0,854	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502
9	0,914	0,837	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460
10	0,905	0,820	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,422
11	0,896	0,804	0,722	0,650	0,585	0,527	0,475	0,429	0,388
12	0,887	0,789	0,701	0,625	0,557	0,497	0,444	0,397	0,356
13	0,879	0,773	0,681	0,601	0,530	0,469	0,415	0,368	0,326
14	0,870	0,758	0,661	0,578	0,505	0,442	0,388	0,341	0,299
15	0,861	0,743	0,642	0,555	0,481	0,417	0,362	0,315	0,275
16	0,853	0,728	0,623	0,534	0,458	0,394	0,339	0,292	0,252
17	0,844	0,714	0,605	0,513	0,436	0,371	0,317	0,270	0,231
18	0,836	0,700	0,587	0,494	0,416	0,350	0,296	0,250	0,212
19	0,828	0,686	0,570	0,475	0,396	0,331	0,277	0,232	0,195
20	0,820	0,673	0,554	0,456	0,377	0,312	0,258	0,215	0,178
21	0,811	0,660	0,538	0,439	0,359	0,294	0,242	0,199	0,164
22	0,803	0,647	0,522	0,422	0,342	0,278	0,226	0,184	0,150
23	0,795	0,634	0,507	0,406	0,326	0,262	0,211	0,170	0,138
24	0,788	0,622	0,492	0,390	0,310	0,247	0,197	0,158	0,126
25	0,780	0,610	0,478	0,375	0,295	0,233	0,184	0,146	0,116
26	0,772	0,598	0,464	0,361	0,281	0,220	0,172	0,135	0,106
27	0,764	0,586	0,450	0,347	0,268	0,207	0,161	0,125	0,098
28	0,757	0,574	0,437	0,334	0,255	0,196	0,150	0,116	0,090
29	0,749	0,563	0,424	0,321	0,243	0,185	0,141	0,107	0,082
30	0,742	0,552	0,412	0,308	0,231	0,174	0,131	0,099	0,075
31	0,735	0,541	0,400	0,297	0,220	0,164	0,123	0,092	0,069
32	0,727	0,531	0,388	0,285	0,210	0,155	0,115	0,085	0,063
33	0,720	0,520	0,377	0,274	0,200	0,146	0,107	0,079	0,058
34	0,713	0,510	0,366	0,264	0,190	0,138	0,100	0,073	0,053
35	0,706	0,500	0,355	0,253	0,181	0,130	0,094	0,068	0,049
36	0,699	0,490	0,345	0,244	0,173	0,123	0,088	0,063	0,045
37	0,692	0,481	0,335	0,234	0,164	0,116	0,082	0,058	0,041
38	0,685	0,471	0,325	0,225	0,157	0,109	0,077	0,054	0,038
39	0,678	0,462	0,316	0,217	0,149	0,103	0,072	0,050	0,035
40	0,672	0,453	0,307	0,208	0,142	0,097	0,067	0,046	0,032
41	0,665	0,444	0,298	0,200	0,135	0,092	0,062	0,043	0,029
42	0,658	0,435	0,289	0,193	0,129	0,087	0,058	0,040	0,027
43	0,652	0,427	0,281	0,185	0,123	0,082	0,055	0,037	0,025
44	0,645	0,418	0,272	0,178	0,117	0,077	0,051	0,034	0,023
45	0,639	0,410	0,264	0,171	0,111	0,073	0,048	0,031	0,021
46	0,633	0,402	0,257	0,165	0,106	0,069	0,045	0,029	0,019
47	0,627	0,394	0,249	0,158	0,101	0,065	0,042	0,027	0,017
48	0,620	0,387	0,242	0,152	0,096	0,061	0,039	0,025	0,016
49	0,614	0,379	0,235	0,146	0,092	0,058	0,036	0,023	0,015
50	0,608	0,372	0,228	0,141	0,087	0,054	0,034	0,021	0,013

Таблица 4 (продолжение)

n	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %	16 %	17 %	18 %
1	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,848
2	0,826	0,812	0,797	0,783	0,770	0,756	0,743	0,731	0,718
3	0,751	0,731	0,712	0,693	0,675	0,658	0,641	0,624	0,609
4	0,683	0,659	0,636	0,613	0,592	0,572	0,552	0,534	0,516
5	0,621	0,594	0,567	0,543	0,519	0,497	0,476	0,456	0,437
6	0,565	0,535	0,507	0,480	0,456	0,432	0,410	0,390	0,370
7	0,513	0,482	0,452	0,425	0,400	0,376	0,354	0,333	0,314
8	0,467	0,434	0,404	0,376	0,351	0,327	0,305	0,285	0,266
9	0,424	0,391	0,361	0,333	0,308	0,284	0,263	0,243	0,226
10	0,386	0,352	0,322	0,295	0,270	0,247	0,227	0,208	0,191
11	0,351	0,317	0,288	0,261	0,237	0,215	0,195	0,178	0,162
12	0,319	0,286	0,257	0,231	0,208	0,187	0,169	0,152	0,137
13	0,290	0,258	0,229	0,204	0,182	0,163	0,145	0,130	0,116
14	0,263	0,232	0,205	0,181	0,160	0,141	0,125	0,111	0,099
15	0,239	0,209	0,183	0,160	0,140	0,123	0,108	0,095	0,084
16	0,218	0,188	0,163	0,142	0,123	0,107	0,093	0,081	0,071
17	0,198	0,170	0,146	0,125	0,108	0,093	0,080	0,069	0,060
18	0,180	0,153	0,130	0,111	0,095	0,081	0,069	0,059	0,051
19	0,164	0,138	0,116	0,098	0,083	0,070	0,060	0,051	0,043
20	0,149	0,124	0,104	0,087	0,073	0,061	0,051	0,043	0,037
21	0,135	0,112	0,093	0,077	0,064	0,053	0,044	0,037	0,031
22	0,123	0,101	0,083	0,068	0,056	0,046	0,038	0,032	0,026
23	0,112	0,091	0,074	0,060	0,049	0,040	0,033	0,027	0,022
24	0,102	0,082	0,066	0,053	0,043	0,035	0,028	0,023	0,019
25	0,092	0,074	0,059	0,047	0,038	0,030	0,025	0,020	0,016
26	0,084	0,066	0,053	0,042	0,033	0,026	0,021	0,017	0,014
27	0,076	0,060	0,047	0,037	0,029	0,023	0,018	0,014	0,012
28	0,069	0,054	0,042	0,033	0,026	0,020	0,016	0,012	0,010
29	0,063	0,049	0,037	0,029	0,022	0,017	0,014	0,011	0,008
30	0,057	0,044	0,033	0,026	0,020	0,015	0,012	0,009	0,007
31	0,052	0,039	0,030	0,023	0,017	0,013	0,010	0,008	0,006
32	0,047	0,036	0,027	0,020	0,015	0,011	0,009	0,007	0,005
33	0,043	0,032	0,024	0,018	0,013	0,010	0,008	0,006	0,004
34	0,039	0,029	0,021	0,016	0,012	0,009	0,006	0,005	0,004
35	0,036	0,026	0,019	0,014	0,010	0,008	0,006	0,004	0,003
36	0,032	0,023	0,017	0,012	0,009	0,007	0,005	0,004	0,003
37	0,029	0,021	0,015	0,011	0,008	0,006	0,004	0,003	0,002
38	0,027	0,019	0,014	0,010	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002
39	0,024	0,017	0,012	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,002
40	0,022	0,015	0,011	0,008	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001
41	0,020	0,014	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002	0,002	0,001
42	0,018	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001
43	0,017	0,011	0,008	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001
44	0,015	0,010	0,007	0,005	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001
45	0,014	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001
46	0,013	0,008	0,005	0,004	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
47	0,011	0,007	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
48	0,010	0,007	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
49	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
50	0,009	0,005	0,004	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000

Таблица 4 (продолжение)

n	**19 %**	**20 %**	**21 %**	**22 %**	**23 %**	**24 %**	**25 %**	**30 %**	**40 %**
1	0,840	0,833	0,826	0,820	0,813	0,807	0,800	0,769	0,714
2	0,706	0,694	0,683	0,672	0,661	0,650	0,640	0,592	0,510
3	0,593	0,579	0,565	0,551	0,537	0,525	0,512	0,455	0,364
4	0,499	0,482	0,467	0,451	0,437	0,423	0,410	0,350	0,260
5	0,419	0,402	0,386	0,370	0,355	0,341	0,328	0,269	0,186
6	0,352	0,335	0,319	0,303	0,289	0,275	0,262	0,207	0,133
7	0,296	0,279	0,263	0,249	0,235	0,222	0,210	0,159	0,095
8	0,249	0,233	0,218	0,204	0,191	0,179	0,168	0,123	0,068
9	0,209	0,194	0,180	0,167	0,155	0,144	0,134	0,094	0,048
10	0,176	0,162	0,149	0,137	0,126	0,116	0,107	0,073	0,035
11	0,148	0,135	0,123	0,112	0,103	0,094	0,086	0,056	0,025
12	0,124	0,112	0,102	0,092	0,083	0,076	0,069	0,043	0,018
13	0,104	0,094	0,084	0,075	0,068	0,061	0,055	0,033	0,013
14	0,088	0,078	0,069	0,062	0,055	0,049	0,044	0,025	0,009
15	0,074	0,065	0,057	0,051	0,045	0,040	0,035	0,020	0,006
16	0,062	0,054	0,047	0,042	0,036	0,032	0,028	0,015	0,005
17	0,052	0,045	0,039	0,034	0,030	0,026	0,023	0,012	0,003
18	0,044	0,038	0,032	0,028	0,024	0,021	0,018	0,009	0,002
19	0,037	0,031	0,027	0,023	0,020	0,017	0,014	0,007	0,002
20	0,031	0,026	0,022	0,019	0,016	0,014	0,012	0,005	0,001
21	0,026	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011	0,009	0,004	0,001
22	0,022	0,018	0,015	0,013	0,011	0,009	0,007	0,003	0,001
23	0,018	0,015	0,013	0,010	0,009	0,007	0,006	0,002	0,000
24	0,015	0,013	0,010	0,009	0,007	0,006	0,005	0,002	0,000
25	0,013	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,001	0,000
26	0,011	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,001	0,000
27	0,009	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000
28	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,001	0,000
29	0,006	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,000
30	0,005	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000
31	0,005	0,004	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000
32	0,004	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000
33	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000
34	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000
35	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
36	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
37	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
38	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
39	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
40	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
41	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
42	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
43	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
44	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
45	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
46	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
47	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
48	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
49	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 5. Коэффициент наращения аннуитета

$$FM3(r,n) = ((1+r)^n - 1)/r$$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,010	2,020	2,030	2,040	2,050	2,060	2,070	2,080	2,090
3	3,030	3,060	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278
4	4,060	4,122	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573
5	5,101	5,204	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985
6	6,152	6,308	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523
7	7,214	7,434	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200
8	8,286	8,583	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028
9	9,369	9,755	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021
10	10,462	10,950	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193
11	11,567	12,169	12,808	13,486	14,207	14,972	15,784	16,645	17,560
12	12,683	13,412	14,192	15,026	15,917	16,870	17,888	18,977	20,141
13	13,809	14,680	15,618	16,627	17,713	18,882	20,141	21,495	22,953
14	14,947	15,974	17,086	18,292	19,599	21,015	22,550	24,215	26,019
15	16,097	17,293	18,599	20,024	21,579	23,276	25,129	27,152	29,361
16	17,258	18,639	20,157	21,825	23,657	25,673	27,888	30,324	33,003
17	18,430	20,012	21,762	23,698	25,840	28,213	30,840	33,750	36,974
18	19,615	21,412	23,414	25,645	28,132	30,906	33,999	37,450	41,301
19	20,811	22,841	25,117	27,671	30,539	33,760	37,379	41,446	46,018
20	22,019	24,297	26,870	29,778	33,066	36,786	40,995	45,762	51,160
21	23,239	25,783	28,676	31,969	35,719	39,993	44,865	50,423	56,765
22	24,472	27,299	30,537	34,248	38,505	43,392	49,006	55,457	62,873
23	25,716	28,845	32,453	36,618	41,430	46,996	53,436	60,893	69,532
24	26,973	30,422	34,426	39,083	44,502	50,816	58,177	66,765	76,790
25	28,243	32,030	36,459	41,646	47,727	54,865	63,249	73,106	84,701
26	29,526	33,671	38,553	44,312	51,113	59,156	68,676	79,954	93,324
27	30,821	35,344	40,710	47,084	54,669	63,706	74,484	87,351	102,723
28	32,129	37,051	42,931	49,968	58,403	68,528	80,698	95,339	112,968
29	33,450	38,792	45,219	52,966	62,323	73,640	87,347	103,966	124,135
30	34,785	40,568	47,575	56,085	66,439	79,058	94,461	113,283	136,308
31	36,133	42,379	50,003	59,328	70,761	84,802	102,073	123,346	149,575
32	37,494	44,227	52,503	62,701	75,299	90,890	110,218	134,214	164,037
33	38,869	46,112	55,078	66,210	80,064	97,343	118,933	145,951	179,800
34	40,258	48,034	57,730	69,858	85,067	104,184	128,259	158,627	196,982
35	41,660	49,994	60,462	73,652	90,320	111,435	138,237	172,317	215,711
36	43,077	51,994	63,276	77,598	95,836	119,121	148,913	187,102	236,125
37	44,508	54,034	66,174	81,702	101,628	127,268	160,337	203,070	258,376
38	45,953	56,115	69,159	85,970	107,710	135,904	172,561	220,316	282,630
39	47,412	58,237	72,234	90,409	114,095	145,058	185,640	238,941	309,066
40	48,886	60,402	75,401	95,026	120,800	154,762	199,635	259,057	337,882
41	50,375	62,610	78,663	99,827	127,840	165,048	214,610	280,781	369,292
42	51,879	64,862	82,023	104,820	135,232	175,951	230,632	304,244	403,528
43	53,398	67,159	85,484	110,012	142,993	187,508	247,776	329,583	440,846
44	54,932	69,503	89,048	115,413	151,143	199,758	266,121	356,950	481,522
45	56,481	71,893	92,720	121,029	159,700	212,744	285,749	386,506	525,859
46	58,046	74,331	96,501	126,871	168,685	226,508	306,752	418,426	574,186
47	59,626	76,817	100,397	132,945	178,119	241,099	329,224	452,900	626,863
48	61,223	79,354	104,408	139,263	188,025	256,565	353,270	490,132	684,280
49	62,835	81,941	108,541	145,834	198,427	272,958	378,999	530,343	746,866
50	64,463	84,579	112,797	152,667	209,348	290,336	406,529	573,770	815,084

Таблица 5 (продолжение)

n	**10 %**	**11 %**	**12 %**	**13 %**	**14 %**	**15 %**	**16 %**	**17 %**	**18 %**
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,100	2,110	2,120	2,130	2,140	2,150	2,160	2,170	2,180
3	3,310	3,342	3,374	3,407	3,440	3,473	3,506	3,539	3,572
4	4,641	4,710	4,779	4,850	4,921	4,993	5,066	5,141	5,215
5	6,105	6,228	6,353	6,480	6,610	6,742	6,877	7,014	7,154
6	7,716	7,913	8,115	8,323	8,536	8,754	8,977	9,207	9,442
7	9,487	9,783	10,089	10,405	10,730	11,067	11,414	11,772	12,142
8	11,436	11,859	12,300	12,757	13,233	13,727	14,240	14,773	15,327
9	13,579	14,164	14,776	15,416	16,085	16,786	17,519	18,285	19,086
10	15,937	16,722	17,549	18,420	19,337	20,304	21,321	22,393	23,521
11	18,531	19,561	20,655	21,814	23,045	24,349	25,733	27,200	28,755
12	21,384	22,713	24,133	25,650	27,271	29,002	30,850	32,824	34,931
13	24,523	26,212	28,029	29,985	32,089	34,352	36,786	39,404	42,219
14	27,975	30,095	32,393	34,883	37,581	40,505	43,672	47,103	50,818
15	31,772	34,405	37,280	40,417	43,842	47,580	51,660	56,110	60,965
16	35,95	39,19	42,75	46,67	50,98	55,72	60,93	66,65	72,94
17	40,54	44,50	48,88	53,74	59,12	65,08	71,67	78,98	87,07
18	45,60	50,40	55,75	61,73	68,39	75,84	84,14	93,41	103,74
19	51,16	56,94	63,44	70,75	78,97	88,21	98,60	110,28	123,41
20	57,27	64,20	72,05	80,95	91,02	102,44	115,38	130,03	146,63
21	64,00	72,27	81,70	92,47	104,77	118,81	134,84	153,14	174,02
22	71,40	81,21	92,50	105,49	120,44	137,63	157,41	180,17	206,34
23	79,54	91,15	104,60	120,20	138,30	159,28	183,60	211,80	244,49
24	88,50	102,17	118,16	136,83	158,66	184,17	213,98	248,81	289,49
25	98,35	114,41	133,33	155,62	181,87	212,79	249,21	292,10	342,60
26	109,18	128,00	150,33	176,85	208,33	245,71	290,09	342,76	405,27
27	121,10	143,08	169,37	200,84	238,50	283,57	337,50	402,03	479,22
28	134,21	159,82	190,70	227,95	272,89	327,10	392,50	471,38	566,48
29	148,63	178,40	214,58	258,58	312,09	377,17	456,30	552,51	669,45
30	164,49	199,02	241,33	293,20	356,79	434,75	530,31	647,44	790,95
31	181,94	221,91	271,29	332,32	407,74	500,96	616,16	758,50	934,32
32	201,14	247,32	304,85	376,52	465,82	577,10	715,75	888,45	1103,50
33	222,25	275,53	342,43	426,46	532,04	664,67	831,27	1040,49	1303,13
34	245,48	306,84	384,52	482,90	607,52	765,37	965,27	1218,37	1538,69
35	271,02	341,59	431,66	546,68	693,57	881,17	1120,71	1426,49	1816,65
36	299,13	380,16	484,46	618,75	791,67	1014,35	1301,03	1669,99	2144,65
37	330,04	422,98	543,60	700,19	903,51	1167,50	1510,19	1954,89	2531,69
38	364,04	470,51	609,83	792,21	1031,00	1343,62	1752,82	2288,23	2988,39
39	401,45	523,27	684,01	896,20	1176,34	1546,17	2034,27	2678,22	3527,30
40	442,59	581,83	767,09	1013,70	1342,03	1779,09	2360,76	3134,52	4163,21
41	487,85	646,83	860,14	1146,49	1530,91	2046,95	2739,48	3668,39	4913,59
42	537,64	718,98	964,36	1296,53	1746,24	2355,00	3178,79	4293,02	5799,04
43	592,40	799,07	1081,08	1466,08	1991,71	2709,25	3688,40	5023,83	6843,86
44	652,64	887,96	1211,81	1657,67	2271,55	3116,63	4279,55	5878,88	8076,76
45	718,90	986,64	1358,23	1874,16	2590,56	3585,13	4965,27	6879,29	9531,58
46	791,80	1096,17	1522,22	2118,81	2954,24	4123,90	5760,72	8049,77	11248,2
47	871,97	1217,75	1705,88	2395,25	3368,84	4743,48	6683,43	9419,23	13273,9
48	960,17	1352,70	1911,59	2707,63	3841,48	5456,00	7753,78	11021,5	15664,2
49	1057,19	1502,50	2141,98	3060,63	4380,28	6275,41	8995,39	12896,1	18484,8
50	1163,91	1668,77	2400,02	3459,51	4994,52	7217,72	10435,6	15089,5	21813,0

Таблица 5 (продолжение)

n	19 %	20 %	21 %	22 %	23 %	24 %	25 %	30 %	40 %
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,190	2,200	2,210	2,220	2,230	2,240	2,250	2,300	2,400
3	3,606	3,640	3,674	3,708	3,743	3,778	3,813	3,990	4,360
4	5,291	5,368	5,446	5,524	5,604	5,684	5,766	6,187	7,104
5	7,297	7,442	7,589	7,740	7,893	8,048	8,207	9,043	10,946
6	9,683	9,930	10,183	10,442	10,708	10,980	11,259	12,756	16,324
7	12,523	12,916	13,321	13,740	14,171	14,615	15,073	17,583	23,853
8	15,902	16,499	17,119	17,762	18,430	19,123	19,842	23,858	34,395
9	19,923	20,799	21,714	22,670	23,669	24,712	25,802	32,015	49,153
10	24,709	25,959	27,274	28,657	30,113	31,643	33,253	42,619	69,814
11	30,404	32,150	34,001	35,962	38,039	40,238	42,566	56,405	98,739
12	37,180	39,581	42,142	44,874	47,788	50,895	54,208	74,327	139,235
13	45,244	48,497	51,991	55,746	59,779	64,110	68,760	97,625	195,929
14	54,841	59,196	63,909	69,010	74,528	80,496	86,949	127,913	275,300
15	66,261	72,035	78,330	85,192	92,669	100,815	109,687	167,286	386,420
16	79,85	87,44	95,78	104,93	114,98	126,01	138,11	218,47	541,99
17	96,02	105,93	116,89	129,02	142,43	157,25	173,64	285,01	759,78
18	115,27	128,12	142,44	158,40	176,19	195,99	218,04	371,52	1064,70
19	138,17	154,74	173,35	194,25	217,71	244,03	273,56	483,97	1491,58
20	165,42	186,69	210,76	237,99	268,79	303,60	342,94	630,17	2089,21
21	197,85	225,03	256,02	291,35	331,61	377,46	429,68	820,22	2925,89
22	236,44	271,03	310,78	356,44	408,88	469,06	538,10	1067,28	4097,24
23	282,36	326,24	377,05	435,86	503,92	582,63	673,63	1388,46	5737,14
24	337,01	392,48	457,22	532,75	620,82	723,46	843,03	1806,00	8033,00
25	402,04	471,98	554,24	650,96	764,61	898,09	1054,79	2348,80	11247,2
26	479,43	567,38	671,63	795,17	941,46	1114,63	1319,49	3054,44	15747,0
27	571,52	681,85	813,68	971,10	1159,0	1383,15	1650,36	3971,78	22046,9
28	681,11	819,22	985,55	1185,74	1426,5	1716,1	2063,95	5164,31	30866,6
29	811,52	984,07	1193,5	1447,61	1755,6	2128,9	2580,94	6714,6	43214,3
30	966,71	1181,8	1445,1	1767,08	2160,4	2640,9	3227,17	8729,9	60501,0
31	1151,3	1419,2	1749,6	2156,8	2658,4	3275,7	4034,	11349	84702,5
32	1371,2	1704,1	2118,1	2632,3	3270,8	4062,9	5044	14756	118584
33	1632,7	2045,9	2563,8	3212,5	4024	5039	6307	19184	166019
34	1943,9	2456,1	3103,3	3920,2	4951	6249	7885	24940	232428
35	2314,2	2948,3	3755,9	4783,6	6090	7750	9857	32423	325400
36	2754,9	3539,0	4545,7	5837,0	7492	9611	12322	42151	455561
37	3279,3	4247,8	5501,3	7122,2	9216	11919	15403	54797	637787
38	3903,4	5098,4	6657,5	8690,1	11337	14781	19255	71237	892903
39	4646,1	6119,0	8056,6	10602,9	13946	18329	24070	92609	1250065
40	5529,8	7343,9	9749,5	12936,5	17154	22729	30089	120393	1750092
41	6581,5	8813,6	11797,9	15783,6	21100	28185	37612	156512	2450129
42	7833,0	10577,4	14276,5	19257,0	25955	34950	47016	203466	3430182
43	9322,2	12693,8	17275,6	23494,5	31925	43339	58771	264507	4802256
44	11094,5	15233,6	20904,4	28664,3	39269	53741	73464	343860	6723160
45	13203,4	18281,3	25295,3	34971,4	48302	66640	91831	447019	9412424
46	15713,1	21938,6	30608,4	42666,1	59412	82635	114790	581126	13177395
47	18699,6	26327,3	37037,1	52053,7	73078	102468	143489	755465	18448354
48	22253,5	31593,7	44815,9	63506,5	89887	127062	179362	982106	25827697
49	26482,6	37913,5	54228,3	77478,9	110562	157558	224204	1276738	36158776
50	31515,3	45497,2	65617,2	94525,3	135992	195373	280256	1659761	50622288

Таблица 6. Коэффициент дисконтирования аннуитета

$$FM4(r,n) = (1-(1+r)^{-n})/r$$

n	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917
2	1,970	1,942	1,913	1,886	1,859	1,833	1,808	1,783	1,759
3	2,941	2,884	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531
4	3,902	3,808	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240
5	4,853	4,713	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890
6	5,795	5,601	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486
7	6,728	6,472	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033
8	7,652	7,325	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535
9	8,566	8,162	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995
10	9,471	8,983	8,530	8,111	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418
11	10,368	9,787	9,253	8,760	8,306	7,887	7,499	7,139	6,805
12	11,255	10,575	9,954	9,385	8,863	8,384	7,943	7,536	7,161
13	12,134	11,348	10,635	9,986	9,394	8,853	8,358	7,904	7,487
14	13,004	12,106	11,296	10,563	9,899	9,295	8,745	8,244	7,786
15	13,865	12,849	11,938	11,118	10,380	9,712	9,108	8,559	8,061
16	14,718	13,578	12,561	11,652	10,838	10,106	9,447	8,851	8,313
17	15,562	14,292	13,166	12,166	11,274	10,477	9,763	9,122	8,544
18	16,398	14,992	13,754	12,659	11,690	10,828	10,059	9,372	8,756
19	17,226	15,678	14,324	13,134	12,085	11,158	10,336	9,604	8,950
20	18,046	16,351	14,877	13,590	12,462	11,470	10,594	9,818	9,129
21	18,857	17,011	15,415	14,029	12,821	11,764	10,836	10,017	9,292
22	19,660	17,658	15,937	14,451	13,163	12,042	11,061	10,201	9,442
23	20,456	18,292	16,444	14,857	13,489	12,303	11,272	10,371	9,580
24	21,243	18,914	16,936	15,247	13,799	12,550	11,469	10,529	9,707
25	22,023	19,523	17,413	15,622	14,094	12,783	11,654	10,675	9,823
26	22,795	20,121	17,877	15,983	14,375	13,003	11,826	10,810	9,929
27	23,560	20,707	18,327	16,330	14,643	13,211	11,987	10,935	10,027
28	24,316	21,281	18,764	16,663	14,898	13,406	12,137	11,051	10,116
29	25,066	21,844	19,188	16,984	15,141	13,591	12,278	11,158	10,198
30	25,808	22,396	19,600	17,292	15,372	13,765	12,409	11,258	10,274
31	26,542	22,938	20,000	17,588	15,593	13,929	12,532	11,350	10,343
32	27,270	23,468	20,389	17,874	15,803	14,084	12,647	11,435	10,406
33	27,990	23,989	20,766	18,148	16,003	14,230	12,754	11,514	10,464
34	28,703	24,499	21,132	18,411	16,193	14,368	12,854	11,587	10,518
35	29,409	24,999	21,487	18,665	16,374	14,498	12,948	11,655	10,567
36	30,108	25,489	21,832	18,908	16,547	14,621	13,035	11,717	10,612
37	30,800	25,969	22,167	19,143	16,711	14,737	13,117	11,775	10,653
38	31,485	26,441	22,492	19,368	16,868	14,846	13,193	11,829	10,691
39	32,163	26,903	22,808	19,584	17,017	14,949	13,265	11,879	10,726
40	32,835	27,355	23,115	19,793	17,159	15,046	13,332	11,925	10,757
41	33,500	27,799	23,412	19,993	17,294	15,138	13,394	11,967	10,787
42	34,158	28,235	23,701	20,186	17,423	15,225	13,452	12,007	10,813
43	34,810	28,662	23,982	20,371	17,546	15,306	13,507	12,043	10,838
44	35,455	29,080	24,254	20,549	17,663	15,383	13,558	12,077	10,861
45	36,095	29,490	24,519	20,720	17,774	15,456	13,606	12,108	10,881
46	36,727	29,892	24,775	20,885	17,880	15,524	13,650	12,137	10,900
47	37,354	30,287	25,025	21,043	17,981	15,589	13,692	12,164	10,918
48	37,974	30,673	25,267	21,195	18,077	15,650	13,730	12,189	10,934
49	38,588	31,052	25,502	21,341	18,169	15,708	13,767	12,212	10,948
50	39,196	31,424	25,730	21,482	18,256	15,762	13,801	12,233	10,962

Таблица 6 (продолжение)

n	10 %	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %	16 %	17 %	18 %
1	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847
2	1,736	1,713	1,690	1,668	1,647	1,626	1,605	1,585	1,566
3	2,487	2,444	2,402	2,361	2,322	2,283	2,246	2,210	2,174
4	3,170	3,102	3,037	2,974	2,914	2,855	2,798	2,743	2,690
5	3,791	3,696	3,605	3,517	3,433	3,352	3,274	3,199	3,127
6	4,355	4,231	4,111	3,998	3,889	3,784	3,685	3,589	3,498
7	4,868	4,712	4,564	4,423	4,288	4,160	4,039	3,922	3,812
8	5,335	5,146	4,968	4,799	4,639	4,487	4,344	4,207	4,078
9	5,759	5,537	5,328	5,132	4,946	4,772	4,607	4,451	4,303
10	6,145	5,889	5,650	5,426	5,216	5,019	4,833	4,659	4,494
11	6,495	6,207	5,938	5,687	5,453	5,234	5,029	4,836	4,656
12	6,814	6,492	6,194	5,918	5,660	5,421	5,197	4,988	4,793
13	7,103	6,750	6,424	6,122	5,842	5,583	5,342	5,118	4,910
14	7,367	6,982	6,628	6,302	6,002	5,724	5,468	5,229	5,008
15	7,606	7,191	6,811	6,462	6,142	5,847	5,575	5,324	5,092
16	7,824	7,379	6,974	6,604	6,265	5,954	5,668	5,405	5,162
17	8,022	7,549	7,120	6,729	6,373	6,047	5,749	5,475	5,222
18	8,201	7,702	7,250	6,840	6,467	6,128	5,818	5,534	5,273
19	8,365	7,839	7,366	6,938	6,550	6,198	5,877	5,584	5,316
20	8,514	7,963	7,469	7,025	6,623	6,259	5,929	5,628	5,353
21	8,649	8,075	7,562	7,102	6,687	6,312	5,973	5,665	5,384
22	8,772	8,176	7,645	7,170	6,743	6,359	6,011	5,696	5,410
23	8,883	8,266	7,718	7,230	6,792	6,399	6,044	5,723	5,432
24	8,985	8,348	7,784	7,283	6,835	6,434	6,073	5,746	5,451
25	9,077	8,422	7,843	7,330	6,873	6,464	6,097	5,766	5,467
26	9,161	8,488	7,896	7,372	6,906	6,491	6,118	5,783	5,480
27	9,237	8,548	7,943	7,409	6,935	6,514	6,136	5,798	5,492
28	9,307	8,602	7,984	7,441	6,961	6,534	6,152	5,810	5,502
29	9,370	8,650	8,022	7,470	6,983	6,551	6,166	5,820	5,510
30	9,427	8,694	8,055	7,496	7,003	6,566	6,177	5,829	5,517
31	9,479	8,733	8,085	7,518	7,020	6,579	6,187	5,837	5,523
32	9,526	8,769	8,112	7,538	7,035	6,591	6,196	5,844	5,528
33	9,569	8,801	8,135	7,556	7,048	6,600	6,203	5,849	5,532
34	9,609	8,829	8,157	7,572	7,060	6,609	6,210	5,854	5,536
35	9,644	8,855	8,176	7,586	7,070	6,617	6,215	5,858	5,539
36	9,677	8,879	8,192	7,598	7,079	6,623	6,220	5,862	5,541
37	9,706	8,900	8,208	7,609	7,087	6,629	6,224	5,865	5,543
38	9,733	8,919	8,221	7,618	7,094	6,634	6,228	5,867	5,545
39	9,757	8,936	8,233	7,627	7,100	6,638	6,231	5,869	5,547
40	9,779	8,951	8,244	7,634	7,105	6,642	6,233	5,871	5,548
41	9,799	8,965	8,253	7,641	7,110	6,645	6,236	5,873	5,549
42	9,817	8,977	8,262	7,647	7,114	6,648	6,238	5,874	5,550
43	9,834	8,989	8,270	7,652	7,117	6,650	6,239	5,875	5,551
44	9,849	8,999	8,276	7,657	7,120	6,652	6,241	5,876	5,552
45	9,863	9,008	8,283	7,661	7,123	6,654	6,242	5,877	5,552
46	9,875	9,016	8,288	7,664	7,126	6,656	6,243	5,878	5,553
47	9,887	9,024	8,293	7,668	7,128	6,657	6,244	5,879	5,553
48	9,897	9,030	8,297	7,671	7,130	6,659	6,245	5,879	5,554
49	9,906	9,036	8,301	7,673	7,131	6,660	6,246	5,880	5,554
50	9,915	9,042	8,304	7,675	7,133	6,661	6,246	5,880	5,554

Таблица 6 (продолжение)

n	19 %	20 %	21 %	22 %	23 %	24 %	25 %	30 %	40 %
1	0,840	0,833	0,826	0,820	0,813	0,806	0,800	0,769	0,714
2	1,547	1,528	1,509	1,492	1,474	1,457	1,440	1,361	1,224
3	2,140	2,106	2,074	2,042	2,011	1,981	1,952	1,816	1,589
4	2,639	2,589	2,540	2,494	2,448	2,404	2,362	2,166	1,849
5	3,058	2,991	2,926	2,864	2,803	2,745	2,689	2,436	2,035
6	3,410	3,326	3,245	3,167	3,092	3,020	2,951	2,643	2,168
7	3,706	3,605	3,508	3,416	3,327	3,242	3,161	2,802	2,263
8	3,954	3,837	3,726	3,619	3,518	3,421	3,329	2,925	2,331
9	4,163	4,031	3,905	3,786	3,673	3,566	3,463	3,019	2,379
10	4,339	4,192	4,054	3,923	3,799	3,682	3,571	3,092	2,414
11	4,486	4,327	4,177	4,035	3,902	3,776	3,656	3,147	2,438
12	4,611	4,439	4,278	4,127	3,985	3,851	3,725	3,190	2,456
13	4,715	4,533	4,362	4,203	4,053	3,912	3,780	3,223	2,469
14	4,802	4,611	4,432	4,265	4,108	3,962	3,824	3,249	2,478
15	4,876	4,675	4,489	4,315	4,153	4,001	3,859	3,268	2,484
16	4,938	4,730	4,536	4,357	4,189	4,033	3,887	3,283	2,489
17	4,990	4,775	4,576	4,391	4,219	4,059	3,910	3,295	2,492
18	5,033	4,812	4,608	4,419	4,243	4,080	3,928	3,304	2,494
19	5,070	4,843	4,635	4,442	4,263	4,097	3,942	3,311	2,496
20	5,101	4,870	4,657	4,460	4,279	4,110	3,954	3,316	2,497
21	5,127	4,891	4,675	4,476	4,292	4,121	3,963	3,320	2,498
22	5,149	4,909	4,690	4,488	4,302	4,130	3,970	3,323	2,498
23	5,167	4,925	4,703	4,499	4,311	4,137	3,976	3,325	2,499
24	5,182	4,937	4,713	4,507	4,318	4,143	3,981	3,327	2,499
25	5,195	4,948	4,721	4,514	4,323	4,147	3,985	3,329	2,499
26	5,206	4,956	4,728	4,520	4,328	4,151	3,988	3,330	2,500
27	5,215	4,964	4,734	4,524	4,332	4,154	3,990	3,331	2,500
28	5,223	4,970	4,739	4,528	4,335	4,157	3,992	3,331	2,500
29	5,229	4,975	4,743	4,531	4,337	4,159	3,994	3,332	2,500
30	5,235	4,979	4,746	4,534	4,339	4,160	3,995	3,332	2,500
31	5,239	4,982	4,749	4,536	4,341	4,161	3,996	3,332	2,500
32	5,243	4,985	4,751	4,538	4,342	4,162	3,997	3,333	2,500
33	5,246	4,988	4,753	4,539	4,343	4,163	3,997	3,333	2,500
34	5,249	4,990	4,755	4,540	4,344	4,164	3,998	3,333	2,500
35	5,251	4,992	4,756	4,541	4,345	4,164	3,998	3,333	2,500
36	5,253	4,993	4,757	4,542	4,345	4,165	3,999	3,333	2,500
37	5,255	4,994	4,758	4,543	4,346	4,165	3,999	3,333	2,500
38	5,256	4,995	4,759	4,543	4,346	4,165	3,999	3,333	2,500
39	5,257	4,996	4,759	4,544	4,346	4,166	3,999	3,333	2,500
40	5,258	4,997	4,760	4,544	4,347	4,166	3,999	3,333	2,500
41	5,259	4,997	4,760	4,544	4,347	4,166	4,000	3,333	2,500
42	5,260	4,998	4,760	4,544	4,347	4,166	4,000	3,333	2,500
43	5,260	4,998	4,761	4,545	4,347	4,166	4,000	3,333	2,500
44	5,261	4,998	4,761	4,545	4,347	4,166	4,000	3,333	2,500
45	5,261	4,999	4,761	4,545	4,347	4,166	4,000	3,333	2,500
46	5,261	4,999	4,761	4,545	4,348	4,166	4,000	3,333	2,500
47	5,262	4,999	4,761	4,545	4,348	4,166	4,000	3,333	2,500
48	5,262	4,999	4,761	4,545	4,348	4,167	4,000	3,333	2,500
49	5,262	4,999	4,761	4,545	4,348	4,167	4,000	3,333	2,500
50	5,262	4,999	4,762	4,545	4,348	4,167	4,000	3,333	2,500